

Jeová Pereira Martins



*Uma linguagem geométrica singular
refletida no Códice Atlântico de
Leonardo da Vinci:
contribuições para a geometria
escolar*



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICAS

JEOVÁ PEREIRA MARTINS

**Uma linguagem geométrica singular refletida no Códice Atlântico de Leonardo
da Vinci: contribuições para a geometria escolar**

BELÉM
2021

JEOVÁ PEREIRA MARTINS

Uma linguagem geométrica singular refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci: contribuições para a geometria escolar

Texto sobre a pesquisa doutoral apresentado como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Educação em Ciências e Matemáticas, no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará.

Área de concentração: Educação Matemática.

Linha de Pesquisa: História, Filosofia e Estudos Culturais.

Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes.

BELÉM
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Amanda Moura de Sousa CRB-7/5992

B695 Martins, Jeová Pereira.
Uma linguagem geométrica singular refletida no
Códice Atlântico de Leonardo da Vinci:
contribuições para a geometria escola / Jeová
Pereira Martins. – Belém, PA, 2021.
267 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Iran Abreu Mendes.
Tese (doutorado)- Universidade Federal do Pará,
Instituto de Educação Matemática e Científica,
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e
Matemáticas, Belém, 2021.

Bibliografia: p. 262-267
1. Leonardo da Vinci. 2. Códice Atlântico. 3.
Semiótica. 4. Ensino de geometria 5. Educação
Básica. I. Mendes, Iran Abreu. II. Universidade
Federal do Pará. Instituto de Educação Matemática e
Científica. III. Título. CDD 516

Índices para catálogo sistemático:

1. Geometria 516

JEOVÁ PEREIRA MARTINS

Uma linguagem geométrica singular refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci: contribuições para a geometria escolar

Texto sobre a pesquisa doutoral apresentado como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Educação em Ciências e Matemáticas no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará. Área de concentração Educação Matemática.

Data da aprovação: 26/02/2021

Banca examinadora

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes - Presidente
(Universidade Federal do Pará - Orientador)

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio
(Universidade Anhanguera de São Paulo - Membro externo)

Prof.^a Dr.^a. Maria Lucia Santaella Braga
(Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - Membro externo)

Prof.^a Dr.^a. Marisa Rosâni Abreu da Silveira
(Universidade Federal do Pará - Membro interno)

Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales
(Universidade Federal do Pará - Membro interno)

Prof.^a Dr.^a. Ana Carolina Costa Pereira
(Universidade Estadual do Ceará - Membro externo, suplente)

Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da Silva
(Universidade Federal do Pará - Membro interno, suplente)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

ATA DE DEFESA DOUTORAL

Aos vinte e seis dias do mês de fevereiro de dois mil e vinte um, às nove horas, reuniu-se via plataforma virtual, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, composta pelos Professores Doutores: Iran Abreu Mendes (presidente), Elielson Ribeiro de Sales (membro interno), Marisa Rosâni Abreu da Silveira (membro interno), Ubiratan D'Ambrosio (membro externo – UNESP Rio Claro), Maria Lúcia Santaella Braga (membro externo – PUCSP), Ana Carolina Costa Pereira (membro suplente – UECE) e Carlos Aldemir Farias da Silva (membro suplente – PPGECEM/UFPA). Sob a presidência do primeiro, procederam ao Exame de Defesa Doutoral de **JEOVÁ PEREIRA MARTINS**, que apresentou o trabalho intitulado “**Uma linguagem geométrica singular refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci: contribuições para a geometria escolar**”. Após a arguição do doutorando, a Banca reuniu-se em separado para a avaliação e apresentou o seguinte parecer:

O trabalho apresentado cumpre todos os requisitos necessários para uma tese de doutorado. O tema investigado é pertinente, relevante, inovador e aponta possibilidades para a formação de professores de matemática e para o ensino de matemática, uma vez que emerge do referido tema a necessidade de valorização do ensino de geometria na Educação Básica. Organizado em três partes pertinentes e coerentes com a abordagem e os referenciais teórico-metodológicos anunciados, o texto apresenta informações importantes sobre as relações entre a geometria do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e a geometria abordada na Educação Básica, interpretada à luz dos estudos sobre semiótica propostos por Santaella. A banca examinadora destacou a capacidade do doutorando em saber propor um problema de pesquisa relevante, objetivos claros a partir do problema formulado e do recorte estabelecido para o objeto de análise e do diálogo estabelecido com a literatura que trata do tema, com reflexões, críticas e proposta de superações. Os resultados apresentados estão correlacionados aos objetivos e à questão de pesquisa proposta, e refletidos na interpretação semiótica das folhas dos desenhos geométricos do Códice Atlântico e nas relações com temas da geometria da Educação Básica, em conexão com a história da matemática. A banca examinadora sugere uma revisão geral do trabalho para a sua versão final, com respeito a norma culta da língua. Recomenda-se a publicação integral do trabalho na forma de livro e indica-se para concorrer ao prêmio CAPES de Teses.

Assim, o candidato é considerado APROVADO neste Exame de Defesa de Tese Doutoral.

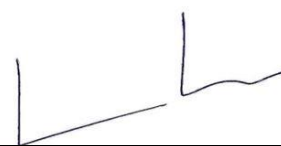
Em caso de aprovação, considerar que: sendo cumpridas as exigências regimentais, no prazo de até 60 (sessenta) dias, o Colegiado do Programa homologará a Tese e concederá o título de **Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas**, na área de concentração de **Educação Matemática**.

E, para constar, a presente ata foi lida e assinada por todos os membros da Banca Examinadora.

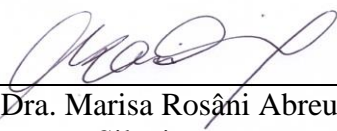
Belém, 26 de fevereiro de 2021.



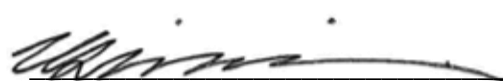
Prof. Dr. Iran Abreu Mendes



Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales



Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da
Silveira



Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio



Profa. Dra. Maria Lúcia Santaella
Braga



Profa. Dra. Ana Carolina Costa
Pereira



Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da
Silva

A meus pais Raimundo e Marcinda, a minha esposa
Hemellen e a meus filhos Jonas, Joab e João Lucca.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pai celestial, pelo dom da vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Iran Abreu Mendes, pelos ensinamentos para a vida acadêmica, profissional e pessoal. Sua orientação segura me possibilitou cumprir a caminhada do processo de formação com êxito.

À Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC), pelo apoio.

Às agências de financiamento, CAPES e CNPq, pela chancela e financiamento das atividades do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA).

Ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da UFPA, pela atenção a mim dispensada por todos os servidores públicos que dele fazem parte.

Aos membros do Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM), por me ouvirem e compartilharem comigo seus conhecimentos.

Às professoras doutoras Maria Lucia Santaella Braga, Marisa Rosâni Abreu da Silveira, Ana Carolina Costa Pereira, Maria dos Remédios de Brito, Cristina Lúcia Dias Vaz, Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes e aos professores doutores Iran Abreu Mendes, Carlos Aldemir Farias da Silva, Ubiratan D'Ambrosio e Elielson Ribeiro de Sales, depreenderam tempo e energia na leitura de meu trabalho e que contribuíram decisivamente para seu aprimoramento.

Aos colegas da pós-graduação do Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA, com os quais convivi durante o período do mestrado e do doutorado, pelo compartilhamento de experiências, ideias, sentimentos e opiniões.

À minha família, base sólida sem a qual eu não teria conseguido essa vitória.

RESUMO

O ensino de matemática na Educação Básica requer especial atenção de professores e pesquisadores do campo da Educação Matemática, pois tem como uma de suas funções a formação integral do estudante no que tange aos conhecimentos matemáticos a ela necessários. Este trabalho aponta possibilidades para essa formação na Educação Básica e objetiva estabelecer relações entre os objetos da geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e os objetos da geometria escolar. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, que teve como objeto central de investigação os desenhos e anotações de Leonardo da Vinci contidos no Códice Atlântico em busca de objetos da geometria para o estabelecimento de relações com a geometria escolar. As informações foram tratadas a partir de um estudo das 602 folhas do referido Códice, das quais 13 foram analisadas sob um enfoque da semiótica e leitura de imagens matemáticas abordados por Santaella (2005, 2012, 2018). Os resultados da análise apontam que os desenhos e anotações de Leonardo da Vinci contidos no Códice Atlântico possuem elementos relacionados à geometria escolar que podem ser mobilizados para o ensino a partir da problematização desses elementos, materializada em atividades de ensino e projetos de investigação que poderão se constituir em subsídios didáticos a serem incorporados pelo professor de matemática no ensino de geometria na Educação Básica.

Palavras-chave: Leonardo da Vinci; Códice Atlântico; Semiótica; Ensino de geometria; Educação Básica.

ABSTRACT

Mathematics teaching in Basic Education requires special attention from teachers and researchers in the field of Mathematics Education, because one of its functions is the student's integral education as far as the mathematics' knowledge needed for teaching. This thesis points out possibilities for this formation process in Basic Education and aims to establish relationships between the elements of geometry as reflected in Leonardo da Vinci's Codex Atlanticus and the elements of school level geometry. It is a qualitative research whose focus were Leonardo da Vinci's drawings and notes contained in the Codex Atlanticus, where we searched for geometry objects with which we could establish relationships with school level geometry. The information gathered was dealt with based on a study of the Codex's 602 pages, of which 13 were analyzed according to semiotic principles and to the reading of mathematical images as defined by Santaella (2005, 2012, 2018). The results of this analysis show that the drawings and notes contained in Leonardo da Vinci's Codex Atlanticus present elements related to school level geometry which can be mobilized in teaching processes based on the problematization of these elements, materialized in teaching activities and investigation projects that may become didactical subsidies to be incorporated by mathematics' teachers in the teaching of geometry in Basic Education.

Keywords: Leonardo da Vinci; Codex Atlanticus; Semiotics; Geometry teaching; Basic Education.

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica requiere una atención especial por parte de los profesores e investigadores del campo de la Educación Matemática, pues tienen como una de sus funciones es la formación integral del alumno en cuanto a los conocimientos matemáticos necesarios para ello. Este trabajo apunta posibilidades para esta formación en la Educación Básica y tiene como objetivo establecer relaciones entre los objetos de la geometría reflejados en el Códice Atlántico de Leonardo da Vinci y los objetos de la geometría escolar. Esta investigación de tipo cualitativa, que tuvo como principal objeto de investigación los dibujos y anotaciones de Leonardo da Vinci contenidos en el Códice Atlántico en busca de objetos de geometría para el establecimiento de relaciones con la geometría escolar. Las informaciones fueron tratadas a partir de un estudio de las 602 hojas del citado Códice, de las cuales 13 fueron analizadas por un enfoque de la semiótica y lectura de imágenes matemáticas abordada por Santaella (2005, 2012, 2018). Los resultados del análisis indican que los dibujos y anotaciones de Leonardo da Vinci contenidos en el Códice Atlántico tienen elementos relacionados con la geometría escolar que pueden ser movilizados para la enseñanza a partir de la problematización de estos elementos, materializados en actividades de enseñanza y proyectos de investigación que pueden constituir subsidios didácticos para ser incorporados por el profesor de matemáticas en la enseñanza de geometría en la Educación Básica.

Palabras clave: Leonardo da Vinci; Códice Atlántico; Semiótica; Enseñanza de geometría; Educación Básica.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Frontispício de Os elementos de Euclides por Campanus.....	34
Figura 2: Vista lateral da Catedral de Florença.....	39
Figura 3: A Anunciação que está na Galeria Uffizi.....	44
Figura 4: A virgem dos rochedos do Museu do Louvre.....	47
Figura 5: O Velho Códice.....	50
Figura 6: O Códice Atlântico Edição Hoepli.....	51
Figura 7: Edição luxuosa do Códice Atlântico.....	53
Figura 8: O Códice Atlântico edição de 2000.....	53
Figura 9: Edições do Códice Atlântico em 20 volumes.....	54
Figura 10: Volume 7 do Códice Atlântico estudado.....	55
Figura 11: Folha 26v. Levantamento de água.....	59
Figura 12: Folha 3r. Máquina para escavar canais.....	60
Figura 13: Folha 70br. Asa mecânica.....	61
Figura 14: Folha 149br. Besta gigante.....	62
Figura 15: Folha 518r. Desenhos geométricos.....	63
Figura 16: Folha 201r.....	64
Figura 17: Folha 30r.....	67
Figura 18: Folha 30r.....	68
Figura 19: Folhas 239 e 399.....	69
Figura 20: La bella principessa e Desenho de Isabella d'Este.....	70
Figura 21: Folha 233.....	71
Figura 22: Folha 567r. Aritmética.....	72
Figura 23: Folha 455.....	73
Figura 24: Folha 305.....	74
Figura 25: Folha 253r.....	82
Figura 26: Rede conceitual semiótica.....	84
Figura 27: Folha 334r. Pirâmide subdividida.....	87
Figura 28: São jerônimo no deserto.....	94
Figura 29: Dama com arminho.....	95
Figura 30: Folha 161.....	102
Figura 31: Folha 231r.....	105
Figura 32: Desenho sobre a duplicação do cubo.....	111

Figura 33: Folha 588r.....	112
Figura 34: Determinação das médias proporcionais.....	113
Figura 35: Método de Hierão.....	117
Figura 36: O objeto cubo no livro didático.....	123
Figura 37: Folha 100r.....	125
Figura 38: Quadrados ABCD e A'B'C'D'.....	128
Figura 39: Relação entre cilindro e cone.....	130
Figura 40: Relação entre volume do prisma e da pirâmide.....	132
Figura 41: Triângulo inscrito no retângulo.....	134
Figura 42: Relação entre área do triângulo e do retângulo.....	138
Figura 43: Desenho D da folha 100r.....	138
Figura 44: Folha 529r.....	141
Figura 45: Pirâmide inscrita no paralelepípedo retângulo.....	142
Figura 46: Folha 334r.....	145
Figura 47: Pirâmide subdividida.....	146
Figura 48: Pirâmide originado pela decomposição.....	147
Figura 49: Tetraedro originado pela decomposição da pirâmide.....	147
Figura 50: Folha 119r. Estudo da perspectiva geométrica.....	148
Figura 51: Desenho central da folha 119r.....	149
Figura 52: Folha 5r. Desenhando uma esfera armilar.....	151
Figura 53: A última ceia e a perspectiva.....	152
Figura 54: Relação entre triângulo isósceles e triângulo retângulo.....	153
Figura 55: Ampliação e redução de figuras.....	154
Figura 56: Folha 544r.....	156
Figura 57: Procedimento de Leonardo da Vinci para quadrar o retângulo.....	157
Figura 58: Retângulo abcd.....	158
Figura 59: Quadratura do retângulo.....	159
Figura 60: Desenho com régua e compasso.....	161
Figura 61: Retângulo NBOG.....	162
Figura 62: Paralelogramo de Os elementos.....	164
Figura 63: Folha 300r.....	165
Figura 64: Retângulo inscrito no triângulo retângulo.....	166
Figura 65: Retângulo.....	167
Figura 66: Folha 308v.....	170

Figura 67: Quadrado da proporcionalidade.....	173
Figura 68: Folha 308v. Quadratura do retângulo.....	174
Figura 69: Folha 308v. Equivalência entre porções do círculo.....	176
Figura 70: Folha 308v. Detalhe	176
Figura 71: Folha 308v. Elaboração das porções e estrelas.....	177
Figura 72: Folha 307v.....	179
Figura 73: Folha 297v.....	184
Figura 74: Folha 297r.....	186
Figura 75: Porções originadas pela inscrição do quadrado.....	188
Figura 76: Lúnulas de Hipócrates.....	189
Figura 77: Folha 486r.....	190
Figura 78: Desenho principal da folha 486r.....	191
Figura 79: Equivalência entre porções do círculo.....	193
Figura 80: Folha 100 do Códice Atlântico.....	213
Figura 81: Cone e cilindro.....	216
Figura 82: Prisma e pirâmide.....	216
Figura 83: Folha 36r.....	217
Figura 84: Triângulo isósceles e círculo.....	218
Figura 85: Folha 300r.....	221
Figura 86: Retângulo inscrito no triângulo retângulo.....	223
Figura 87: Triângulo retângulo EBF.....	224
Figura 88: Folha 8r.....	226
Figura 89: Moinho de água.....	227
Figura 90: Esquema do moinho.....	228
Figura 91: Guindaste de Da Vinci.....	231
Figura 92: Esquema do guindaste.....	231
Figura 93: Folha 389 do Códice Atlântico.....	235
Figura 94: Lúnula.....	238
Figura 95: Lúnulas e o retângulo inscrito.....	239
Figura 96: Equivalência triângulo e as lúnulas.....	240
Figura 97: Três tipos de lúnulas.....	242
Figura 98: Lúnulas e a inscrição de polígonos.....	243

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Um modelo de pesquisa sobre o Códice Atlântico.....	28
Quadro 2: Categorias das folhas do Códice Atlântico.....	66
Quadro 3: Temas de geometria.....	75
Quadro 4: Duplicação do cubo.....	76
Quadro 5: Geometria espacial e projetiva.....	76
Quadro 6: Geometria plana e fundamentos.....	77
Quadro 7: Quadratura do círculo.....	78
Quadro 8: Síntese da interpretação semiótica.....	98
Quadro 9: O objeto área no Ensino Fundamental.....	195

SUMÁRIO

PARTE I - DO CONTEXTO

Trata-se do contexto da pesquisa desde sua apresentação e suas questões, dos objetivos, procedimentos e fundamentos adotados. Em seguida, aborda-se o contexto histórico e sociocultural da fonte das informações adotada para o estudo: o Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, o criador das folhas, sua organização e as edições publicadas. Finaliza-se essa parte com a seleção das folhas analisadas, os fundamentos e procedimentos de análise.....18

PARTE II - DA ANÁLISE

Esta parte trata do exercício que envolve a trajetória da geometria do Códice à geometria escolar, com base em uma análise semiótica de 13 folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci. A análise foi organizada em quatro seções que tratam: da duplicação do cubo e os modos como Da Vinci a problematizou; da geometria espacial e projetiva identificada; da geometria plana e seus fundamentos refletidos e das artes da quadratura do círculo imaginadas e estabelecidas.....100

PARTE III - DOS ENCAMINHAMENTOS PEDAGÓGICOS

Trata-se da geometria escolar refletida no Códice Atlântico e seus encaminhamentos para um fazer pedagógico na escola. Nesta parte, apresentamos e discutimos sugestões de atividades de problematização e de projeto de investigação histórica no Códice Atlântico.....199

CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO

Nesta parte do trabalho de pesquisa realizado, abordam-se reflexões, pensamentos e análises finais, por meio da retomada da questão, hipótese e objetivos preestabelecidos para confirmar o que foi alcançado, além de destacar resultados e apontar algumas contribuições do estudo e os seus possíveis desdobramentos.....248

REFERÊNCIAS.....262



PARTE I - DO CONTEXTO

Trata-se do contexto da pesquisa desde sua apresentação e suas questões, dos objetivos, procedimentos e fundamentos adotados. Em seguida, aborda-se o contexto histórico e sociocultural da fonte das informações adotada para o estudo: o Códice Atlântico, o criador das folhas, sua organização e as edições publicadas. Finaliza-se essa parte com a seleção das folhas analisadas, os fundamentos e procedimentos de análise.

Do contexto da pesquisa

O presente texto relata os resultados de uma pesquisa doutoral realizada no âmbito da Universidade Federal do Pará (UFPA) que tomou como objeto de estudo o Códice Atlântico, um manuscrito de Leonardo da Vinci (1452-1519) composto por desenhos e anotações sobre estudos por ele realizados, ao longo de mais de 40 anos, acerca de temas como ciência dos pesos, anatomia, óptica, balística, arquitetura e geometria¹. Neste trabalho, o manuscrito foi tomado como uma fonte textual histórica a ser investigada segundo a perspectiva da fonte como discurso (BARROS, 2004), ou seja, como portadora de informações em si, cujo texto (no sentido ampliado) é abordado qualitativamente na busca por informações não apenas na superfície, mas que estão submersas em suas camadas complexas, como as que se referem aos contextos histórico e sociocultural, nos quais as informações contidas na fonte foram produzidas.

Foi possível adentrar essas camadas a partir de uma análise dos desenhos e anotações de Leonardo da Vinci, contidos na fonte, embasada em conceitos da Semiótica², abordados por Santaella (2005, 2012, 2018). A Semiótica é entendida como uma ciência cujo objeto de estudo é a linguagem, em todas as suas formas de expressão. Assim, a autora se interessa em revelar como tais linguagens se organizam para produzir significações e sentidos no pensamento do observador que passa por uma experiência, ou seja, o observador que tem contato com um determinado tipo de linguagem – aqui, de forma específica, a linguagem geométrica singular registrada por Leonardo da Vinci nas folhas que compõem o Códice Atlântico.

A Linguagem geométrica contida no Códice Atlântico é singular, por ter sido elaborada por Da Vinci a partir da geometria antiga³, ressignificada por meio da fusão entre ciência e suas observações e experimentações mobilizadas para sua prática artística, especialmente a pintura. Essa linguagem é constituída por desenhos e anotações e sua interpretação foi mediada por uma arqueologia (BARROS, 2004) que buscou pequenos indícios da geometria refletida e os reuniu em um todo que

¹ A imagem de abertura desta parte retrata o Códice Atlântico junto de algumas das folhas de desenhos e anotações que ele contém. Fonte da imagem: <https://www.milanintour.com/pt-br/servicos-de-guia-turistico/>. Acesso em 12/10/2019.

² Nos referimos à Semiótica desenvolvida por C. S. Peirce (1839-1914) cuja representante brasileira é a Professora Lúcia Santaella, com mais de 50 anos dedicados à pesquisa sobre o tema, materializados em algumas centenas de publicações. Fonte: <http://lattes.cnpq.br/8886485096957731>. Acesso em 10/11/2020.

³ Nos referimos à geometria da Antiguidade grega, principalmente aquela de *Os elementos* de Euclides.

evidenciou aspectos: 1) históricos, pois se trata de um manuscrito dos séculos XV e XVI; 2) socioculturais, pois os desenhos e anotações foram elaborados em uma sociedade com cultura específica, ligada ao tempo e ao espaço; 3) artísticos, pois o autor dos desenhos e anotações era artista; 4) geométricos, pois os desenhos e anotações são produto dos estudos e experimentações de Leonardo da Vinci com geometria; e 5) educacionais, pois os objetos de geometria mobilizados por Da Vinci em seus estudos se relacionam ou são os mesmos objetos de aprendizagem da geometria abordada na Educação Básica.

Como estamos na parte introdutória do trabalho, faremos uma ressalva no intuito de tornar o texto mais compreensível. Nosso entendimento é que este trabalho não é um trabalho do campo de pesquisas sobre história da matemática. Talvez o seria se tivéssemos o objetivo de escrever uma história (não hegemônica) da matemática estudada e mobilizada por Leonardo da Vinci em toda a sua obra, o que não ocorreu em nosso trabalho. Este trabalho contém aspectos históricos, uma vez que as informações analisadas advêm de uma fonte histórica, o Códice Atlântico, e a contextualização dessa fonte requereu um estudo nas fronteiras do tempo e do espaço de sua produção.

Diante do exposto, esclarecemos que este é um trabalho do campo da Educação Matemática, produzido em um Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas com macro-objetivos relacionados ao desenvolvimento e aprimoramento da pesquisa no campo, relativamente ao ensino de matemática, e à formação de professores que ensinam matemática que são *estacas* desse campo de pesquisa (KILPATRICK, 1996). Tais objetivos foram redimensionados e perseguidos em um trabalho que tomou informações a partir de uma fonte histórica, cuja análise semiótica dessas informações possibilitou propormos encaminhamentos pedagógicos fundados na problematização e investigação (MIGUEL; MENDES, 2010; MENDES, 2009a, 2009b, 2015), para o ensino de geometria na Educação Básica que transversalizam para a formação de professores que ensinam matemática nesse nível.

Assim, reiteramos a ideia central deste trabalho na qual *a análise semiótica dos desenhos e anotações de Leonardo da Vinci contidos no Códice Atlântico trazem à tona um conhecimento produzido no passado, qual seja, uma geometria singular, que*

pode ser posta em correspondência com a geometria escolar⁴ por meio de problematizações e investigações históricas que provoquem o estabelecimento de relações entre tais geometrias. Esse movimento que relaciona a geometria refletida no Códice Atlântico à geometria escolar e o ensino de geometria é o que poderá contribuir para que o ensino seja praticado da maneira mais eficiente possível, ou seja, que os estudantes apreendam os objetos de geometria ensinados e formulem seus conceitos (pessoais) sobre tais temas.

Para que nossa investigação pudesse atender a critérios de cientificidade para uma pesquisa doutoral, definimos as bases epistemológicas de sustentação da pesquisa no seu aspecto mais amplo e de forma específica, refletidas nos estudos para produção de informações, análises, conclusões e encaminhamentos pedagógicos formulados. Em nossa pesquisa, tais bases estão materializadas nos fundamentos metodológicos, teóricos e conceituais que foram organizados de forma a compor um cenário para dizer (explicar) o modo como o conhecimento foi produzido no desenvolvimento da pesquisa. Os fundamentos transversalizaram as etapas da pesquisa e guiaram o olhar do pesquisador para o foco temático na busca por respostas à questão proposta.

Com vista à organização desse cenário em nossa pesquisa, tomamos como fundamentos as ideias de: Santaella (2005, 2012, 2018), sobre semiótica e leitura de imagens; Mendes (2009a, 2009b, 2015), sobre ensino por investigação e investigação histórica; Miguel e Mendes (2010), sobre problematização; e Barros (2004), sobre a pesquisa com fontes históricas. Tais fundamentos foram importantes para justificar e expressar nossa concepção de conhecimento científico e de como decorre a sua produção por meio da investigação, além de serem retomados na interpretação das informações produzidas e nas conclusões do estudo cuja finalidade maior é a geração do conhecimento novo, inédito, condição *sine qua non* para que se tenha ao final da pesquisa uma tese defendida e sustentada por argumentos sólidos.

A formulação final dos objetivos só foi possível após uma exploração investigativa inicial do Códice Atlântico, pois o que tínhamos inicialmente era uma intenção de pesquisa com base em hipótese e indagações sobre o conteúdo da fonte, ou seja, não conhecíamos a fonte, o Códice Atlântico. Então, a partir de leituras iniciais sobre essa fonte, pudemos supor que no manuscrito haviam informações

⁴ Neste texto, o termo geometria escolar refere-se à geometria abordada na Educação Básica.

relacionadas à geometria e, a julgar pelo período criativo e fecundo em que viveu o seu autor e pela amplitude de sua produção artística, essa arte poderia conter elementos de geometria que possibilitariam o estabelecimento de relações com os objetos da geometria escolar.

Baseados nas hipóteses iniciais, lançamos um primeiro olhar para o Códice Atlântico, que possibilitou a confirmação de tais hipóteses. Dessa forma, o estudo foi se moldando durante a sua feitura e tomando forma, o que culminou com a ampliação das hipóteses iniciais expressas na hipótese central descrita a seguir.

A geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci contém objetos de geometria que se relacionam aos objetos da geometria escolar e que podem ser explorados pelo professor por meio da problematização dos desenhos e anotações contidos nos 10 volumes, referentes à publicação investigada, tanto para a elaboração de encaminhamentos pedagógicos para a Educação Básica quanto para a formação de professores que ensinam matemática.

A partir da hipótese central, chegamos a uma questão central assim definida: *Que tipos de relações podem ser estabelecidas entre os objetos da geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e os objetos da geometria escolar?*

No intuito de obter possíveis respostas à questão, elaboramos os objetivos que foram perseguidos durante todo o processo de pesquisa visando alcançá-los. Tomamos como objetivo geral:

Estabelecer relações entre os objetos da geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e os objetos da geometria escolar.

O objetivo geral remete às ações mais particulares necessárias ao seu cumprimento materializadas nos seguintes objetivos específicos:

- ✓ Explorar investigativamente objetos geométricos do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci;
- ✓ Selecionar as folhas do Códice Atlântico cuja geometria refletida se relaciona aos objetos da geometria escolar
- ✓ Analisar as folhas do Códice Atlântico selecionadas sob um enfoque da semiótica e leitura de imagens matemáticas;
- ✓ Elaborar encaminhamentos pedagógicos para a geometria escolar a partir dos resultados da análise semiótica das folhas investigadas.

Atingir os objetivos propostos anteriormente exigiu o planejamento de todas as ações práticas a serem desenvolvidas durante a pesquisa. A seguir, apresentamos tais ações e sua breve descrição que compõem os procedimentos metodológicos da pesquisa. Tais procedimentos nem sempre ocorreram de modo linear, mas sim em um movimento de idas e vindas entre as etapas descritas. No entanto, o texto escrito (que nem sempre dá conta de todos os detalhes de uma pesquisa) carece de uma organização, o que nos levou a optar pela seguinte:

1) Levantamento, seleção e estudo da bibliografia que se refere à literatura especializada da área e às bases epistemológicas (teorias, conceitos e método) da pesquisa.

Nesta etapa, foi realizado um levantamento bibliográfico para identificar e selecionar estudos sobre temas relacionados ao objeto que investigamos. Dentre os temas, destacamos: arte, história, história da matemática, semiótica aplicada à interpretação de múltiplas linguagens, relações entre arte, história e ensino de matemática, Leonardo da Vinci, Códice Atlântico, duplicação do cubo, quadratura do círculo, documentos curriculares e livros didáticos de matemática. Utilizamos as bibliotecas físicas da UFPA e bibliotecas virtuais como o catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES, o Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat), sites de Universidades brasileiras, revistas científicas etc.

Após a seleção, foi realizado um estudo do material para definição dos conceitos e argumentos sustentadores da tese, bem como os parâmetros balizadores da feitura da pesquisa e da escrita do relatório, pois muito já foi feito na pesquisa em Educação Matemática no Brasil e essa produção foi estudada com cuidado para que pudéssemos definir as convergências, divergências, estabelecer elos, aproximações e distanciamentos e assim produzir conhecimento novo, inédito, ou seja, a tese que dessa forma tende a contribuir para o crescimento qualitativo da Educação Matemática como campo de pesquisa e de proposições para o ensino de matemática e para a formação de professores que ensinam matemática.

Tratando-se das convergências e divergências e do estabelecimento de elos de nosso trabalho com os trabalhos existentes no Brasil, encontramos dois trabalhos cujo tema tratado possui similaridades ao que investigamos: a dissertação de mestrado intitulada *Máquinas de voo de Leonardo da Vinci: analogias biônicas e suas*

potencialidades no processo criativo, de autoria de Luara Zucolotto Afonso; e o livro *Leonardo e a matemática*, de autoria de Giorgio T. Bagni e Bruno D'Amore, publicado em 2012 pela Editora Livraria da Física.

A dissertação referida foi o resultado de um levantamento⁵ no qual buscamos trabalhos sobre o Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e usamos como termos de busca: “Códice Atlântico”, “Código Atlântico” e “Codex Atlanticus”. A dissertação encontrada está no Catálogo da CAPES e foi defendida em 2015 no âmbito do curso de mestrado do CEFET-MG. Nesse trabalho, a autora faz um estudo de quatro folhas do Códice Atlântico (70b, 479, 571a e 591) que tratam do voo dos pássaros. O foco da autora, segundo nossa leitura, são as analogias biônicas em correlação ao pensamento por analogia materializado por Da Vinci nos desenhos de asas e máquinas para voar.

No Livro *Leonardo e a matemática*, os autores tratam da matemática que circulou na época de Leonardo da Vinci e dos principais matemáticos dessa época. Tratam, ainda, dos estudos de Leonardo da Vinci que atualmente encontram-se em 10 Códices que reúnem mais de 5 mil folhas com tais estudos. Os autores listam os Códices, os principais temas neles abordados e citam exemplos de folhas, nas quais Leonardo da Vinci abordou a matemática. Dentre os exemplos, os autores citam algumas folhas do Códice Atlântico sobre o problema da quadratura do círculo e o problema da duplicação do cubo (BAGNI; D'AMORE, 2012).

Esses resultados evidenciam que o Códice Atlântico é uma fonte pouco consultada e/ou tomada como objeto de investigação por pesquisas brasileiras. Os trabalhos que encontramos têm foco de estudo diverso do nosso trabalho, pois o trabalho de Zucolotto (2015) visa o modo de pensar de Leonardo da Vinci a partir do conceito de analogias biônicas e estuda folhas específicas sobre o voo dos pássaros. Já Bagni e D'Amore (2012) fazem uma apresentação da matemática no tempo de Da Vinci e dos temas que ele estudou, com destaque para a geometria e a aritmética. Nosso trabalho foca a geometria refletida no Códice Atlântico, analisa folhas sobre geometria e elabora encaminhamentos pedagógicos para a Educação Básica

2) Exploração investigativa do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci.

A formulação da hipótese, da questão e dos objetivos nos impulsionaram para

⁵ O levantamento teve como fontes o Catálogo de Teses e Dissertações da (CAPES), a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o portal do CREPHIMat.

uma exploração investigativa do Códice Atlântico para verificar seu conteúdo, uma vez que só tínhamos hipóteses sobre o que continha na fonte. Esse estudo foi guiado por algumas questões como: O que é o Códice Atlântico? Qual o seu conteúdo? Qual a relação do Códice com Leonardo da Vinci? Há desenhos e anotações relacionados à geometria? Como estão presentes na fonte?

À medida que se avançou no estudo e que se obtiveram respostas às primeiras indagações, outras surgiram, como: por que Leonardo da Vinci fez esses desenhos e anotações? Que relações esses desenhos e anotações têm com as suas pinturas? O que é tratado nessas anotações? Porque tantos desenhos de temas variados? Esses temas que se repetem em todos os 10 volumes do Códice foram estudados? Os desenhos sobre geometria apresentam semelhanças com os objetos da geometria escolar? Quais seriam essas semelhanças? Tomando essas perguntas como guia, seguimos com a investigação que resultou em uma primeira caracterização.

O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci é um manuscrito que reúne 1119 folhas de desenhos e anotações feitas por ele ao longo de mais de 40 anos. Referem-se à sua atividade artística e científica materializada em estudos sobre anatomia, óptica, perspectiva, arquitetura, engenharia e geometria, dentre outros temas de seu interesse. Esses estudos foram registrados por Leonardo da Vinci em milhares de folhas, dentre as quais muitas se perderam após sua morte em 1519. No entanto, parte dessas folhas foi encontrada e publicada por outras pessoas, algumas em Códices como o Códice Atlântico, organizado por Pompeo Leoni (1533-1608).

Há algumas edições do Códice Atlântico em circulação pelo mundo, como a da Editora Fólio de Barcelona, que possui uma versão publicada no Brasil, em 2008, em 10 volumes com 602 folhas das 1119 folhas. Foram essas 602 folhas que investigamos para selecionar as folhas analisadas. Esses dados foram obtidos após a exploração mencionada. Porém, foi necessário fazer uma caracterização mais profunda e detalhada da fonte, da qual tratamos na etapa seguinte.

3) Caracterização da fonte e do autor das informações.

Para caracterizar o Códice Atlântico e o autor das informações nele contidas, partimos de princípios como: os desenhos e anotações foram elaborados em um tempo e lugar, tiveram como autor um artista e se referem a temas científicos que foram estudados por Leonardo da Vinci, por isso essas informações sofreram pressões e interferências da sociedade, e sua organização múltipla e dinâmica da

cultura (artística, científica, escolar etc.) e de uma filosofia (ou filosofias) foram materializadas por um modo de pensar e de agir característicos do tempo e lugar.

A partir desses princípios, lançamo-nos ao encontro do contexto geral e específico de elaboração das informações contidas no Códice Atlântico. Os estudos nos remeteram ao Renascimento Italiano e suas características, bem como a suas fronteiras temporais, como o período da Idade Média que o antecedeu. Nos embasamos em fontes sobre história geral, história das ciências, da educação, da educação matemática, biografias de Leonardo da Vinci e fontes sobre o Códice Atlântico (dentre outros).

4) Seleção das folhas do Códice Atlântico para análise.

A exploração investigativa do Códice Atlântico teve como um dos primeiros resultados a possibilidade de categorização das folhas, pois identificamos temas recorrentes nos 10 volumes investigados. Tal fato possibilitou a organização das 602 folhas em sete categorias: 1) Engenharia; 2) Arquitetura; 3) Artes; 4) Estudos científicos; 5) Aritmética; 6) Geometria; e 7) Outros

Dentre as categorias, optamos pela categoria 6, *Geometria*, para dela selecionarmos as folhas analisadas. Mas por que essa categoria? Porque suas folhas contêm uma geometria refletida que se relaciona aos objetos da geometria escolar. As folhas dessa categoria contêm estudos de Da Vinci sobre uma geometria prática nos quais ele mobilizou objetos da geometria antiga, que são os mesmos ou são similares aos objetos de aprendizagem da geometria escolar.

A escolha de uma das categorias, necessária para o aprofundamento do estudo, não excluiu a importância das outras e a possibilidade de investigações sobre elas, pois em todas contêm desenhos e anotações que possibilitam o estabelecimento de relações com a geometria escolar, talvez em menor proporção que a categoria *Geometria*, mas contêm. São projetos de armas de guerra, prédios e fortificações, estudos sobre óptica, ciência dos pesos etc. que remetem a objetos da geometria como círculos, retângulos, triângulos, pirâmides, dentre outros. Por esse motivo é que na Parte III deste texto elaboramos duas atividades a partir de folhas de outras categorias, para deixar a possibilidade aberta para trabalhos futuros.

Para o aprofundamento do estudo, foi preciso especificar conteúdo da categoria *Geometria*. Por isso, ela foi subdividida em quatro temas que, por sua vez, originaram seis subtemas. Após essa categorização, foi feita a seleção das folhas a serem

analisadas, a partir dos seguintes critérios: 1) Semelhanças com a geometria escolar; 2) Qualidade visual; e 3) Escolha de, pelo menos, uma folha de cada subtema. A categorização descrita será detalhada a seguir.

5) Análise semiótica das folhas selecionadas.

Como já mencionamos, a análise foi fundamentada em elementos da Semiótica propostos nos estudos de Santaella (2012, 2005, 2018). Esses elementos se coadunam e formam um instrumental teórico e metodológico. Teórico por conter um grupo de conceitos que fundamentam a análise, e metodológico porque já trazem da teoria semiótica uma organização em formato de rede que orienta as etapas da análise. Os conceitos da semiótica se referem ao processo de significação ocorrido na mente interpretadora quando ela tem contato com determinada linguagem. Esse processo ocorre em três etapas: a significação, a objetivação e a interpretação, que serão aprofundadas na parte que tratamos dos fundamentos de análise.

6) Elaboração de encaminhamentos pedagógicos para a geometria escolar.

De posse dos resultados da análise semiótica, que mostrou algumas relações entre a geometria refletida no Códice Atlântico e os objetos da geometria escolar, decidimos elaborar dois grupos de encaminhamentos pedagógicos para a geometria escolar: 1. Elaboração de atividades de ensino no formato de Unidades Básicas de Problematização (UBP), segundo Miguel e Mendes (2010); e 2. Materializado na forma de um projeto de investigação histórica no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, segundo Mendes (2009a, 2009b 2015). Os encaminhamentos pedagógicos contêm orientações para utilização em sala de aula e para que o professor (re)elabore os encaminhamentos de acordo com seu contexto escolar.

Para sintetizar o percurso da pesquisa descrito anteriormente, elaboramos um modelo que poderá ser tomado como exemplo por pesquisas futuras que tenham similaridades com nossa investigação, ou seja, pesquisas que tomem como fonte de informações manuscritos, livros e outros registros da produção de conhecimento vinculados à atividade prático-científica de artistas, arquitetos, engenheiros, construtores, inventores e outros estudiosos que mobilizaram a matemática em seus estudos. O modelo de pesquisa se constitui por três níveis, conforme o quadro 1.

Quadro 1: Um modelo de pesquisa sobre o Códice Atlântico

Nível 1	Intenção de pesquisa	
	Indagações e hipóteses iniciais sobre o Códice Atlântico de Leonardo da Vinci.	
	Exploração investigativa inicial do Códice Atlântico	
	Investigação no Códice Atlântico	
	Confirmação/refutação das hipóteses	
	Aprimoramento da intenção de pesquisa (reformulação do problema da hipótese e formulação de objetivos e do percurso metodológico).	
	Caracterização do Códice Atlântico	
	Códice Atlântico: o conteúdo, a organização do conteúdo no Códice, os temas tratados, a publicação original e suas versões.	
	Contextos: histórico, filosófico e sociocultural de produção das informações do Códice Atlântico.	
	O autor das informações: Da Vinci e sua obra, seu modo pensar, suas motivações e objetivos em produzir as informações do Códice.	
	Seleção das folhas para análise	
	Categorização das folhas por temas amplos	602 folhas
	Seleção da categoria <i>geometria</i> e posterior subdivisão para aprofundamento do estudo com foco em temas específicos da geometria refletida no Códice e suas relações com os objetos da geometria escolar.	176 folhas
Estabelecimento de critérios e seleção das folhas para análise.	13 folhas	
Nível 2	Análise semiótica das folhas	
	Significação: as folhas como signos.	
	Objetivação: os objetos de referência das folhas.	
	Interpretação: os efeitos emocional, energético e lógico das folhas na mente interpretadora.	
	Efeito Lógico (Cognição)	Experiência colateral com os objetos de referência das folhas (objetos da geometria e da geometria escolar).
	Formulação da regra interpretativa das folhas	

		(estudo de fontes que tratam do contexto geral e específico da folha).
		Resultados da análise (o estabelecimento das relações entre a geometria refletida no Códice Atlântico e a geometria escolar).
Nível 3	Encaminhamentos pedagógicos	
	Atividades de problematização, projeto de investigação histórica e suas implicações no ensino e na formação de professores.	
	Considerações sobre o estudo	
	Comprovação da hipótese (tese). Relevância, originalidade e Contribuições do trabalho para o campo da Educação Matemática.	

Fonte: Elaboração dos autores.

Esse modelo, que será retomado ao final do trabalho, foi o guia para a pesquisa e para a organização deste texto, pois os níveis 1, 2 e 3 do modelo se traduzem nas Partes I, II e III do texto: A Parte I – Do Contexto – trata sobre o contexto da pesquisa (que relatamos anteriormente), sobre o contexto da fonte e do autor das informações e do contexto de seleção das folhas e dos fundamentos para análise (a seguir); a Parte II – Da Análise – contém a análise semiótica das 13 folhas do Códice Atlântico; e a Parte III – Dos Encaminhamentos Pedagógicos – contém as atividades no formato de UBP e uma sugestão de projeto de investigação histórica no Códice Atlântico. Além das três partes mencionadas, o texto contém as Considerações sobre o estudo e as Referências adotadas.

Sobre Da Vinci e o contexto histórico e sociocultural do Códice Atlântico

Leonardo da Vinci viveu em um período histórico considerado um dos mais inovadores e criativos de todos os tempos, a Renascença Italiana, no qual houve uma erupção de ideias cuja potência as espalhou pela Europa e pelo resto do mundo, principalmente, no que se refere à arte, engenharia e arquitetura. Nesse contexto, mestres artesãos passaram a ser chamados de artistas e antigos construtores de arquitetos e engenheiros, pois foram responsáveis por produzir obras de arte, arquitetura e engenharia dentre as mais importantes que o mundo já conheceu (HEMENWAY, 2010; CONSTRUINDO, 2006).

Aproximadamente entre 1400 e 1600, a Europa foi sacudida por acontecimentos que alteraram as perspectivas intelectuais, sociais, políticas e culturais. Assistiu ao declínio do sistema feudal, à descoberta de novos continentes, à substituição do sistema ptolomaico pelo de Copérnico, à invenção da imprensa, de armamentos de guerra e ao aprimoramento da perspectiva geométrica. As mudanças políticas provocadas pelas guerras afetaram toda a Europa e "as influências revolucionárias se difundiram amplamente", pois a fluidez das condições políticas e o estabelecimento de governos democráticos favoreceram o desenvolvimento do indivíduo, a liberação do povo da dominação da igreja e a oposição intelectual à filosofia predominante (TORNAGHI, 2014; KLINE, 1992, p. 291).

A Renascença ou Renascimento foi um período caracterizado pela valorização do mundo antigo e sua filosofia centrada no homem, o humanismo. Houve uma retomada dos valores éticos, filosóficos e científicos, que os europeus haviam aprendido com os gregos antes do domínio da igreja, que se embasavam no "estudo da natureza, o desfrute do mundo físico, o aperfeiçoamento do corpo e da mente, a liberdade de investigação e de expressão e a confiança na razão humana" (KLINE, 1992, p. 291), que passaram a guiar as ações na sociedade. A filosofia do Renascimento preconizou o homem como um ser racional que filosofa, pensa, entende e participa da construção do conhecimento e da sua realidade, se contrapondo à mentalidade medieval (TORNAGHI, 2014).

Para os humanistas do Renascimento, a Idade Média (aproximadamente 476 - 1453) foi uma época em que houve (na Europa) retrocesso artístico, intelectual, e filosófico, se comparado à produção da Antiguidade Clássica. Se caracterizou pela "opressão cultural, perseguição aos filósofos naturais (cientistas), druidas e bruxas, ao conhecimento intelectual, e a tudo o que se opusesse aos donos da fé" (TORNAGHI, 2014, p. 14). A igreja se embasava na autoridade, reverenciava Aristóteles e criminalizava a dúvida, pois a determinação da verdade era baseada em discussões sobre passagens bíblicas (KLINE, 1992).

Portanto, o humanismo renascentista foi uma filosofia que teve como principal efeito "ajudar as pessoas a libertarem-se das restrições mentais impostas pela ortodoxia religiosa e a inspirar a investigação livre, a crítica e uma nova confiança nas possibilidades do pensamento humano e nas obras de arte" e arquitetura que passaram a figurar como elementos importantes e até centrais em algumas cidades europeias nesse período (HEMENWAY, 2010, p. 104).

Se iniciou uma nova era econômica e surgiu uma nova sociedade (em contraste com as sociedades escravas do Egito, Grécia, e Roma, e a servidão da gleba do feudalismo) que possuía uma classe em expansão de obreiros e artesãos livres, além dos patronos com trabalhadores assalariados, que tinham liberdade e incentivos para pensar e inventar mecanismos que facilitaram o trabalho (KLINE, 1992, p. 292-293).

A Itália, considerada a mãe do Renascimento, é um exemplo dessa nova era, tendo em vista que, no final da Idade Média, acumulou grande riqueza devido à sua localização geográfica e seus portos para o mar, que favoreceram a importação de produtos da África e Ásia e a exportação desses produtos para os demais países da Europa. Essa intensa movimentação comercial provocou o surgimento de grandes casas bancárias que tornaram a Itália o centro financeiro do continente. Essa riqueza desencadeou o processo de produção e difusão de conhecimentos nos moldes da filosofia renascentista, pois "foi na Itália que os modos de pensar, que moldariam a Civilização Ocidental, foram concebidos e expressados por primeiro" (KLINE, 1992, p. 292).

Nesse contexto de ampliação e alargamento de fronteiras (intelectuais, socioculturais, políticas etc.) as fronteiras geográficas estavam em constante mudanças, a exemplo das cidades. A nova sociedade com seus trabalhadores livres optou pela vida nas cidades e estas passaram a ser o centro das atividades sociais atraindo, cada vez mais, pessoas para o seu território. Disputas armadas pelo domínio geográfico e político de regiões eram constantes, a exemplo das que ocorreram entre Florença e Siena que eram rivais e disputavam o domínio da região da Toscana na Itália. Em 1260 entraram em luta na batalha de *Montaperti* que teve Siena como vencedora (KLINE, 1992; CONSTRUINDO, 2006).

A hegemonia de Siena se estendeu até 1347, quando a peste negra atingiu a Europa e arrasou toda a região da Toscana. Siena e Florença, que perderam aproximadamente metade de sua população, viram todo seu esforço pelo desenvolvimento se esvaír. Siena não conseguiu recuperar a importância que antes tinha, mas Florença, por sua vez, conseguiu renascer, após um luto de 50 anos, e ocupar o lugar de maior destaque no cenário nacional e internacional (KLINE, 1992; CONSTRUINDO, 2006).

Os sobreviventes da peste passaram a encarar a vida como um novo nascimento (Renascimento), passaram a valorizá-la e a vivê-la de forma mais intensa, fato que desencadeou o gosto por conhecer, pela arte e a valorização do homem,

segundo os princípios da Antiguidade. Dessa forma, surgiu uma elite rica e culta que, por toda a Toscana, passou a encomendar aos artistas livres vindos do povo, projetos de tipos variados, desde os mais grandiosos, como construções imponentes, aos mais simples, como retratos de damas da corte, por exemplo (HEMENWAY, 2010; CONSTRUINDO, 2006).

Os Médici, família rica de Florença, lideraram o movimento de recuperação da cidade patrocinando construções arquitetônicas e encomendando obras de arte como pinturas e esculturas. Por meio dessa produção arquitetônica e artística, durante o Renascimento, Florença se tornou a capital cultural da Itália e exibiu para a Europa todo o seu poderio de ideias, criatividade e inovações advindas, principalmente, de cabeças geniais, como as de Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leon Battisti Alberti (1404-1472), Michelangelo (1475-1564) e Leonardo da Vinci (1452-1519) (ISAACSON, 2017; TORNAGHI, 2014; CONSTRUINDO, 2006).

Os progressos ocorridos no campo das artes, arquitetura e engenharia (em Florença e outras cidades da Europa) tiveram seu impulso inicial a partir de uma mudança de foco de toda a produção cultural, do divino para o humano, em decorrência das influências da filosofia antiga. Isso contribuiu para a restauração do espírito liberal quase extinto em artes como poesia, pintura, escultura, arquitetura e música, que passaram a se desenvolver e ter como fundamento a integração dos estudos científicos à arte e como fontes de conhecimento, a observação da natureza e a experimentação (KLINE, 1992; TORNAGHI, 2014).

As influências da filosofia antiga mencionadas ocorreram (principalmente) a partir do estudo de Manuscritos e textos gregos do período clássico, pois desde o século XII, a Europa já iniciara um resgate desses textos e adquirira alguns manuscritos que haviam sido traduzidos do grego para o árabe graças ao trabalho de sábios mulçumanos do oriente. Nessa região (Império Islâmico), houve progressos significativos nos estudos científicos durante a Idade Média, pois os estudiosos, além de traduzir os textos, fizeram seu exame crítico e acrescentaram comentários próprios. “Na Espanha moura, só a grande Biblioteca de Córdoba abrigava por volta de seiscentos mil manuscritos” (CAPRA, 2008, p. 155).

Durante o século XV, a Europa recebeu uma quantidade significativa de obras gregas devido à conexão entre o império bizantino e Roma, que possuía a maior coleção de documentos gregos, mas que, até então, estavam isolados. Grande parte estava em mosteiros cristãos longínquos. O império bizantino que guerreava com os

turcos fez alianças com estados da Itália, possibilitando a vinda das referidas obras e o seu estudo na língua original, pois "professores gregos foram à Itália e italianos ao império bizantino aprender grego" (KLINE, 1992. p. 292).

Um desses professores foi Giovanni Aurispa (1376-1459), um Italiano que foi professor e tradutor do grego e que foi enviado à Grécia e a Constantinopla na busca por manuscritos. Ele estava a serviço dos líderes políticos da época que tinham interesse em agregar essas obras para o seu domínio.

Em 1423 Giovanni Aurispa [...] regressou de Constantinopla com um tesouro de 238 manuscritos escritos em grego, língua que os eruditos italianos haviam aprendido somente nas poucas décadas anteriores. Entre esses tesouros estavam seis peças de Ésquilo perdidas e sete de Sófocles, assim como obras de Plutarco, Luciano, Estrabão e Demóstenes. Havia também um exemplar completo das obras do geômetra Proclus de Alexandria e também, o que era mais importante para os engenheiros, um tratado sobre antigos mecanismos para elevação de cargas, a *Coleção Matemática* de Pappus de Alexandria (KING, 2013, p. 88).

A vinda de manuscritos antigos para a Itália se intensificou com a tomada de Constantinopla pelos turcos (em 1453), época em que estudiosos bizantinos migraram para o país levando consigo manuscritos originais e desconhecidos na Europa. Com a criação da imprensa, por Johannes Gutenberg (1400-1468), na segunda metade do século XV, muitos desses textos foram impressos e publicados, o que contribuiu sobremaneira para a sua difusão.

Por volta de 1482, Roma já tinha uma dúzia de impressores e Veneza cerca de uma centena deles, o que a tornou o "mais importante centro de impressão da Europa. Estima-se que os impressores venezianos produziram sozinhos por volta de dois milhões de volumes durante o século XV" (CAPRA, 2008, p. 156). Dentre os textos reproduzidos em Veneza, está a primeira edição impressa de *Os elementos* de Euclides (em 1482), em uma tradução latina realizada por Campanus de Novara (1220-1296), cuja primeira página está retratada na figura 1.

A difusão de textos sobre engenharia, arquitetura e matemática na Itália foi tão intensa que "é lícito falar de um renascimento da matemática na Itália do século XV" (KING, 2013, p. 88). O *De expetendis et fugiendis rebus opus* de Giorgio Valla e *Os elementos* de Euclides são exemplos, desse contexto de Renascimento, que revela o interesse particular dos estudiosos italianos pelo conhecimento das matemáticas antigas.

Figura 1: Frontispício de Os elementos de Euclides por Campanus

Præclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimè in artem Geometrie incipit quædam felicissime:

Lineæ est longitudo sine latitudine cuius quidam ex/terminates si duo puncta. Linea recta est ab uno puncto ad aliud brevissima extensio in extremitates suas utriusque eorum recipiens. Superficies est quæ longitudinem et latitudinem habet; cuius termini quidam sunt linee. Superficies plana est ab una linea ad aliam extensio in extremitates suas recipiens. Angulus planus est duarum linearum alterationis prædictarum: quæ extensio est super superficiem applicationis non directa. Quando autem angulum præterit due linee recte rectilineus angulus nominatur. Quando recta linea super rectam steterit duorumque angulorum utrobique fuerit æquales: eorum uterque rectus erit. Lineæque linee superstitas ei cui inscribitur perpendicularis vocatur. Angulus vero qui recto maior est obtusus dicitur. Angulus vero minor recto acutus appellatur. Terminus est quod uniuscuiusque finis est. Figura est quæ termino vel terminis præterit. Circulus est figura plana una quadam linea que quidem punctum centrum circuli dicitur. Diameter circuli est linea recta que super eum centrum transiens extremitatesque suas circumferentiæ applicans circulum in duo media dividit. Semicirculus est figura plana diameter circuli et medietate circumferentiæ præterita. Lemnicirculo quidem aut maior aut minor. Rectilineæ figure sunt quæ rectis lineis continentur quarum quedam trilateræ quæ tribus rectis lineis: quedam quadrilateræ quæ quatuor rectis lineis. quedam multilateræ que pluribusque quatuor rectis lineis continentur. Figurarum trilaterarum: alia est triangulus habens tria latera equalia. Alia triangulus duo habens equalia latera. Alia triangulus trium unequalium laterum. Hæc iterum alia est orthogonius: unum scilicet rectum angulum habens. Alia est amblygonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est origonium: in qua tres anguli sunt acuti. Figurarum autem quadrilaterarum: Alia est quadratum quod est equilaterum atque rectangulum. Alia est tetragonus longus: quæ est figura rectangula: sed equilatera non est. Alia est belmuayim: que est equilatera: sed rectangula non est.

De principiis per se notis: et primo de definitionibus eorundem.

Linea
 —————
 Punctus

superficies plana.

Circulus

Diameter

Portio maior

Semicirculus

Portio minor

Equilateralis

Orthogonius

Amblygonius

Tetragonus longus

Quadratus

Belmuayim

Fonte: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/16/16131/tde-13102005-115856/publico/02_cap1.pdf.

Uma das motivações para tal interesse, por parte dos intelectuais italianos, foi a busca por bases firmes para edificar o conhecimento, e as matemáticas lhes ofereciam essas bases, pois permaneceram como um dos únicos corpos de verdades aceitas em meio a sistemas filosóficos que desabaram. Assim, a busca da verdade foi redirecionada para o conhecimento matemático que oferecia uma base segura. Esse contexto contribuiu para a ascensão da atividade matemática que se centrou na Itália,

mas que ocorreu, também, na região da Europa Central (COLLETE, 1985; KLINE, 1992; TORNAGHI, 2014).

A atividade matemática a qual nos referimos pode ser entendida como um movimento que contou com a difusão das matemáticas antigas, o estabelecimento de relações dessas matemáticas com o contexto social e cultural da época e a consequente produção de novas matemáticas, prioritariamente, relacionadas às práticas desenvolvidas pela sociedade renascentista no tempo e no espaço como, por exemplo, a atividade comercial, a produção arquitetônica e a atividade artística em geral. Assim, entendemos que as soluções para os problemas surgidos no interior das práticas mencionadas advieram das matemáticas antigas e de novas matemáticas, estas últimas, produzidas por intelectuais externos às práticas e por estudiosos que eram agentes dessas práticas, a exemplo dos artistas, arquitetos e engenheiros renascentistas.

A ascensão matemática em discussão pode ser comprovada pela atividade matemática de alguns estudiosos, materializada por seus estudos e publicações, como, por exemplo, os estudos de: Nicolás de Cusa (1401- 1464), que contribuiu com estudos sobre a área do círculo e na busca de um valor aproximado de π ; Johan Muller (1436-1476), que traduziu clássicos gregos e publicou livros dentre os quais *De Triangulis Omnimodis* (1464), um tratado sobre trigonometria com alguns teoremas de *Os elementos* de Euclides, *Tabule directionum* (1490), no qual deu seguimento ao livro anterior, e *Epítome do Almagesto*, em que destacou a matemática do Almagesto de Ptolomeu; Nicolás Chuquet (1445-1488), que fez estudos sobre álgebra e potenciação e escreveu o artigo *Tripartición en la ciência de los números*, em 1484 (COLLETE, 1985; CAJORI, 2007).

No campo da Aritmética prática destacamos as publicações de: *Aritmética de Treviso* (Itália 1478); *De arithmetica opusculum* de Ph. Calandri (Florença, 1491); e *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalita*, de Luca Pacioli (Veneza 1494). Este último foi uma compilação dos conhecimentos existentes sobre aritmética, álgebra, geometria euclidiana elementar, trigonometria e conhecimentos comerciais de seu tempo. Em 1509, Pacioli publicou, ainda, uma edição simplificada de *Os elementos* de Euclides e *De divina proportione*, em parceria com Leonardo da Vinci (COLLETE, 1985; CAJORI, 2007).

No entanto, as universidades dos séculos XV e XVI não contribuíram significativamente nesse avanço, pois a teologia era quem governava os estudos. O

conhecimento era considerado completo, sem experimentação e os conhecimentos novos eram ignorados. Os professores eram conservadores e adeptos dos conhecimentos medievais escolásticos. Então, boa parte dos esforços matemáticos e publicações eram “destinadas aos comerciantes, engenheiros e artistas, ou seja, aos representantes das artes práticas e não chegaram a influenciar as instituições escolares tradicionais” (MIORIM, 1998, p. 37). Tal fato evidenciava que havia um descompasso entre o desenvolvimento da sociedade, das novas ciências emergentes e o ensino arcaico ministrado nas escolas e universidades (KLINE, 1992).

Esse descompasso já ocorrera há algum tempo e resultou na criação de escolas laicas, as chamadas escolas práticas, uma vez que os praticantes das artes práticas careceram de um novo tipo de formação, geral e matemática. Nessas escolas, ministravam-se cursos de aritmética prática, álgebra, contabilidade, navegação, trigonometria, dentre outros, pelo chamado mestre prático que, geralmente, era um autodidata e especialista em determinada atividade produtiva. Em Florença (por exemplo), em 1338, haviam em torno de seis escolas de ábaco, com um número de alunos de 1000 a 1200, que se destinavam às atividades do comércio. No contexto das escolas práticas, surgiram também os ateliês, que se destinavam a formar os artesãos, dentre os quais alguns se tornariam gênios da arte, engenharia e arquitetura renascentista, como Botticelli e Da Vinci, que provavelmente estudaram no mesmo ateliê. Paralelamente a esses fatos, as escolas subordinadas à igreja e às universidades mantinham a tradição escolástica (MIORIM, 1998; TATON, 1959, A VIDA, 1979).

Nas escolas de doutrina escolástica, o saber se limitou às sete artes liberais constituídas pelo *Trivium* (gramática, retórica, dialética) e pelo *Quadrivium* (aritmética, geometria, música e astronomia). No caso das matemáticas, os únicos textos sobreviventes adotados por quase mil anos como livros escolares seriam os de Boécio (c. 480-524), que continham conteúdos elementares de aritmética e alguns enunciados sem prova dos quatro primeiros livros de Os elementos de Euclides. Felizmente, os artistas, por serem autodidatas e não terem uma educação formal, estavam livres da doutrinação escolástica e tinham liberdade de expressão, pois suas atividades eram consideradas inofensivas (à dominação da Igreja). Por isso, eram contratados para fazer todo tipo de trabalho (MIORIM, 1998; KATZ, 2010).

Desde a criação de grandes pinturas até desenhos de fortificações, canais, pontes, máquinas de guerra, palácios, edifícios públicos e igrejas, em consequência estavam obrigados a aprender matemática, física, arquitetura, engenharia, entelhe de pedras, trabalho com os metais, anatomia, trabalho com madeira, óptica, estática e hidráulica. Se ocuparam de trabalhos manuais mas também de problemas abstratos. No século XV, ao menos, eles eram os melhores físicos matemáticos (KLINE, 1992, p. 312).

Essa multiplicidade de atividades desempenhadas pelos artistas e a consequente polissemia de temas a serem por eles estudados durante a formação nos ateliês e no desempenho da função, os levou a contribuir significativamente com diferentes áreas do conhecimento, especialmente com as matemáticas, que mobilizavam nos seus trabalhos de forma mais evidente a geometria e a perspectiva que se relacionavam, principalmente, com a pintura e arquitetura. A pintura, que outrora objetivava a glorificação de Deus por meio da ilustração de temas bíblicos, agora tinha como foco a descrição do mundo real. Essa mudança levou os artistas a se dedicar ao estudo da natureza e a enfrentar o problema matemático de representar o mundo real, tridimensional, no plano (a tela) bidimensional (KLINE, 1992).

Desde o século III (a.C.), as construções de edifícios já utilizam a projeção ortogonal no plano vertical, aprimorada por Vitruvio no século I d.C. No entanto, foi no Renascimento que os pintores buscaram mais intensamente dar profundidade visual à sua obra. Esse processo se iniciou por tentativa e erro, mas no século XV, os artistas se dedicaram a obter uma base matemática para a perspectiva e concluíram que poderiam alcançá-la por meio da geometria (COLLETE, 1985; KATZ, 2010).

Alguns dos principais estudos e experimentos sobre perspectiva do período do Renascimento foram os de Filippo Brunelleschi (1377-1446), um dos primeiros a fazer um estudo profundo da perspectiva que aprimorou a representação de objetos tridimensionais no plano quando descobriu o ponto de fuga, porém, não publicou seus estudos. O primeiro a escrever e publicar foi Leon Battista Alberti (1404-1472), o *Della Pittura*, em 1435, sendo que o primeiro requisito para um pintor era saber geometria. Piero della Francesca (1420- 1492), na sua *De prospectiva pingendi* (Da perspectiva para pintar), escrita entre 1470 e 1490, contribuiu para avanços das ideias de Alberti e foi considerado como um dos maiores geômetras de seu tempo (KLINE, 1992; COLLETE, 1985).

Os estudos sobre a perspectiva receberam contribuições, ainda, de outros artistas matemáticos como: Lorenzo Ghiberti (1378-1455); Paolo Uccello (1397-1475); Leonardo da Vinci (1452-1519), que escreveu o seu *Tratatto della Pittura* (publicado

somente em 1651); e Albrecht Durer (1471-1528), que foi um artista e matemático alemão que passou alguns anos na Itália estudando sobre perspectiva (KLINE, 1992; COLLETE, 1985).

Além da perspectiva, os artistas do Renascimento se dedicaram a outros temas de geometria como a inscrição de polígonos regulares em circunferências, que era um dos temas de interesse dos artistas renascentistas. Dentre estes, Albrecht Durer, Leonardo da Vinci e Luca Pacioli (que foi aluno de Piero della Francesca e professor de Da Vinci) elaboraram suas tentativas de inscrição por meio da utilização de régua e um compasso de abertura fixa. Dentre tais construções, a do pentágono regular se tornou de grande interesse devido ao novo desenho das fortificações em formato de estrela. Esse novo desenho foi desenvolvido pelos artistas para que as fortalezas resistissem às mudanças e evoluções nas técnicas e equipamentos de guerra como canhões mais potentes, aos quais as antigas fortalezas sucumbiam facilmente. Outro tema de interesses dos geômetras do Renascimento era o centro de gravidade dos corpos e a elaboração de mapas e cartas marítimas (KLINE, 1992).

Os estudiosos, os temas estudados e as publicações que mencionamos anteriormente exemplificam o contexto matemático da época, e reiteram a explicação de que houve uma intensa atividade matemática na Europa, principalmente na Itália no período do Renascimento. Parte significativa dessa matemática era vinculada às práticas desenvolvidas pela sociedade, ou seja, era desenvolvida para as práticas e pelas práticas. O comércio, as navegações, a arquitetura, a engenharia e as artes, práticas em pleno desenvolvimento e ascensão, mobilizavam os estudiosos de todos os níveis sociais em torno da produção de um conhecimento matemático que pudesse sustentar tal desenvolvimento e ascensão.

A trigonometria auxiliava as navegações e as guerras, como no aprimoramento do sistema de localização e no estudo da trajetória dos projéteis (balística). A aritmética impulsionava as atividades comerciais à medida que novas técnicas, como as contábeis aprimoradas por Pacioli, eram inseridas nas transações financeiras. A arquitetura, a engenharia e as artes se valiam de diferentes conhecimentos matemáticos como a aritmética e a geometria, tomada como uma base sólida para o aprimoramento dos projetos e execução de construções arquitetônicas. Inscrição de polígonos em circunferências, área do círculo, quadratura do retângulo e do círculo e transformações volumétricas foram temas estudados no renascimento por pessoas como Leonardo da Vinci e Brunelleschi, que aprimorou práticas sobre perspectiva

geométrica e se destacou na arquitetura com edificações como a construção do *duomo*⁶ da Catedral de Florença.

A Igreja de Santa Maria del Fiore, também conhecida como Catedral de Florença (figura 2), fora projetada para ser a maior de toda a cristandade. Sua construção teve início no século XIII por Arnolfo di Cambio (1232-1310), que faleceu e a deixou incompleta, sem a sua cúpula (*duomo*). No século XV, a construção da cúpula foi retomada por meio de uma concorrência pública que teve como vencedor o projeto de Brunelleschi. Porém, ele teve que dividir a execução com outro famoso construtor, Lorenzo Ghiberti, seu rival e para quem já havia perdido uma concorrência anterior que teve como objeto a construção das portas do batistério de San Giovanni (ISAACSON, 2017; KING, 2013).

Figura 2: Vista lateral da Catedral de Florença



Fonte: <http://informedaarte.com.br/>

Conforme menciona King (2013, p. 19): “A competição entre arquitetos era costume antigo e ilustre. Desde pelo menos 448 a.C. os clientes promoviam concursos entre arquitetos para suas encomendas”. Esse contexto exigia um esforço mental que os levava a serem, quase sempre, inovadores e criativos, ou seja, eles tinham que fazer algo inédito que surpreendesse os julgadores para aumentar a possibilidade de vencer tais concorrências. Isso os conferia fama e credibilidade no meio para que

⁶ Trata-se da cúpula da Catedral em destaque na parte esquerda da figura 2.

pudessem vencer outras concorrências futuras. Prova disso é que Brunelleschi precisou dividir a execução do seu projeto com Ghiberti por, este último, ser mais famoso e reconhecido naquele momento (ISAACSON, 2017; CONSTRUINDO, 2006).

A construção teve início em 1420 e foi um desafio, pois como o *duomo* de base octogonal tinha dimensões gigantescas, construí-lo por si só já era um desafio. Para aumentar a dificuldade, o projeto de Brunelleschi previa a construção do *duomo* sem escoras interiores. O projeto de Brunelleschi foi o mais inovador se comparado a outros, como, por exemplo, o que previa a construção do *duomo* apoiado em uma montanha de terra que seria colocada no interior da igreja e retirada após a finalização da obra. Além da construção do *duomo*, em si, a concorrência previa que o vencedor produzisse os equipamentos necessários para ela, o que levou Brunelleschi a idealizar e construir tais equipamentos como guindastes para içar, aproximadamente, 35 mil toneladas de material a mais de 60 metros de altura e para movimentar esse material horizontalmente no alto do *duomo* (KING, 2013).

Desde a Antiguidade nenhuma abóbada de dimensões parecidas havia sido construída, e aquela, com um diâmetro médio de 43,12 metros, seria maior até mesmo que a do Panteão de Roma, que durante mais de mil anos tinha sido a maior abóbada do mundo. Mas a cúpula de Santa Maria del Fiore não seria a penas a mais ampla jamais construída, e sim também a mais alta. As paredes da catedral já tinham chegado a 42,67 metros de altura, acima dos quais seria construído um tambor de mais 9,14 metros no qual repousaria a cúpula. A finalidade desse tambor era elevar a cúpula, servindo na verdade como um pedestal que a faria ficar ainda mais alta a cima da cidade. A estrutura da Cúpula, portanto seria construída à incrível altura de 58,19 metros, muito mais alta que qualquer das abóbadas construídas na França durante o século XIII (KING, 2013, p. 22).

Depois de pronto, o *duomo* recebeu, ainda a lanterna sobre a qual repousa uma esfera e a cruz (figura 2) que fica a mais de 105 metros de altura. Mas qual a inspiração e fonte de conhecimento de Brunelleschi para projetar algo tão inédito, inovador e desafiador? Quando ele perdeu a concorrência para Ghiberti, em 1401, se retirou de Florença, foi para Roma e lá ficou até o retorno por volta de 1418. Nesse período, é provável que tenha se dedicado a estudar a arquitetura antiga da cidade e a descobrir os segredos de tais construções. Uma de suas inspirações pode ter sido o Panteão, cuja cúpula foi construída com a mesma técnica que Brunelleschi projetou a construção do *duomo* da catedral de Florença (KING, 2013; CONSTRUINDO, 2006).

Esse fato exemplifica parte do contexto social e cultural que a Itália do Renascimento viveu na época de Leonardo da Vinci no que se refere à atividade dos

artistas, arquitetos e engenheiros: a influência da arquitetura antiga e do conhecimento contido em manuscritos antigos, nas construções feitas no período; concorrências entre artistas e arquitetos; a necessidade de os arquitetos e engenheiros se dedicarem ao extremo aos estudos para serem verdadeiros artistas e projetar obras grandiosas e de difícil execução; o conhecimento de diferentes temas das ciências que os tornava verdadeiros polímatas; e a genialidade desses artistas em ter ideias para solucionar problemas de toda ordem advindos da atividade que desempenhavam com excelência. Assim, o que estava em jogo eram as ideias, a produção de conhecimento novo, inédito, materializado nas construções e artes em geral.

O *duomo* ficou pronto em 16 anos e enquanto buscava soluções para os problemas que surgiam, Brunelleschi fez estudos sobre perspectiva e proporções matemáticas. Ele inovou no campo das construções quando percebeu que era possível representar, de forma técnica, construções tridimensionais no plano bidimensional, o que era possível tendo-se como foco o ponto de fuga, essência do desenho em perspectiva introduzido por ele no planejamento de construções. Esse tipo de desenho passou a ser conhecido como a planta feita pelos engenheiros cujos princípios são utilizados até a atualidade na arquitetura e engenharia (KING, 2013; CONSTRUINDO, 2006).

O aprimoramento e introdução da perspectiva por Brunelleschi revolucionou a arte de construir, pois a partir desse momento foi possível fazer deduções mais técnicas sobre as construções a serem feitas e projetá-las, no papel, de maneira mais próxima do real, ou seja, mais semelhante possível ao prédio a ser construído, respeitando-se, ainda, as proporções matemáticas entre a planta e o prédio em si. Além das construções, o desenho em perspectiva foi revolucionário nas artes, pois mudou a maneira de os artistas desenharem e os ajudou a resolver o problema de representação da realidade tridimensional no plano bidimensional, conforme o novo foco das artes na representação da natureza (KING, 2013; CONSTRUINDO, 2006).

Outro aspecto importante desse período foi a presença da figura dos mecenas, que eram os patrocinadores da arte. Geralmente, eram governantes da época que encomendavam obras de arte para suas coleções pessoais e as patrocinavam para serem posta a público. Nesse grupo, figuravam os Médici de Florença e os Sforza de Milão, que além de fazerem encomendas variadas, faziam questão de terem sob sua tutela artistas, engenheiros e arquitetos como uma forma de afirmação pessoal e

social, pois isso os fazia mais poderosos e impunha respeito e reconhecimento na sociedade. Leonardo da Vinci foi um dos artistas que passou a vida trabalhando para esses líderes em cidades como Florença, Milão, Roma e, no final de sua vida, na França (ISAACSON, 2017).

Foi nesse cenário renascentista de expansão de ideias materializadas em obras grandiosas, de disputas entre gênios da arte e da arquitetura e no qual ser criativo, inovador e o melhor entre os melhores era uma questão de sobrevivência que nasceu e viveu Leonardo da Vinci. Ele nasceu na cidade de Vinci, na região da toscana, na Itália, e, segundo registro de seu Avô, Antônio, o nascimento se deu em um sábado, 15 de abril de 1452 às 10:30 da noite, registro esse perdido em um caderno de notas após a morte de Leonardo da Vinci e encontrado em 1939. Filho ilegítimo de Piero da Vinci (tabelião em Florença) com uma camponesa de Vinci chamada Caterina, foi criado pelos avós no lugar onde nasceu. Apesar de a mãe residir na mesma cidade, há poucos indícios de que Leonardo da Vinci tenha convivido com ela (WHITE, 2002).

Na década de 1460, com o falecimento dos avós, Leonardo da Vinci foi morar com o Pai em Florença e iniciou seus estudos na oficina de Andrea del Verrocchio (1435-1488), um mestre-artesão da cidade. Era uma dentre as muitas escolas práticas da época na qual os alunos moravam e estudavam de forma prática para aprender o ofício de mestre-artesão. Esse estudo incluía a feitura de esculturas, pinturas, e objetos a serem usados em espetáculos de teatro que aconteciam nos palácios e cortes da época, mas também o estudo de temas como geometria e anatomia que faziam parte do grupo de conhecimentos necessários à formação. Leonardo da Vinci permaneceu nessa oficina (bottega) por mais ou menos seis anos, obtendo o registro de mestre-artesão em 1472, portanto aos 20 anos de idade. A partir daí ele começou a desenvolver (oficialmente) seus trabalhos como pintor, geralmente encomendados por governantes e líderes religiosos da época (WHITE, 2002).

Ainda na oficina de Verrocchio, Leonardo da Vinci já se destacava como um dos melhores, o que ficou claro quando ele participou da pintura de um quadro Encomendado a Verrocchio. Pietro Perugino, provavelmente Botticelli, e Lorenzo di Credi, conviveram com Leonardo da Vinci na Bottega de Verrocchio. Passados uns cinco anos de sua permanência no lugar, Leonardo da Vinci foi autorizado por seu mestre a pintar parte de um quadro encomendado, O batismo de Jesus. Lorenzo teria comentado que o anjo pintado por Leonardo da Vinci era 100 vezes mais belo do que

o de Verrocchio. Muitos comentadores mencionam que depois do ocorrido, Verrocchio aposentou o pincel e nunca mais voltou a pintar, por ter sido superado por um de seus alunos, Leonardo da Vinci (A VIDA, 1971).

Após se tornar independente da oficina de Verrocchio, Leonardo da Vinci permaneceu em Florença por mais 10 anos, durante os quais se dedicou ao trabalho e aos estudos, pois desde menino, quando vivia em Vinci, tinha uma curiosidade extrema e uma incessante vontade de conhecer e aprender os segredos da natureza e de tudo que nela há. As paisagens exuberantes, a grama verde, os animais, insetos, a água corrente dos rios etc. foram elementos da natureza com os quais Da Vinci conviveu desde pequeno e por meio deles aprendeu a experimentar sua curiosidade.

Sem dúvida, a natureza foi sua escola mais fecunda, pois foi observando-a que Leonardo da Vinci conseguiu desenvolver seu raciocínio a ponto de estabelecer e aprimorar o seu modo de pensar por analogia, do qual advém toda a sua criatividade. A esse respeito, alguns comentadores enfatizam que há um método característico estabelecido por Leonardo da Vinci para sua criação artística e técnica com base nos princípios que estabelecem a representação por analogia, como a experimentação e a inseparabilidade entre teoria e prática, conforme assevera Valéry (1998).

[...] para Leonardo a linguagem não é tudo. O saber não tudo para ele; talvez lhe seja somente um meio. Leonardo desenha, calcula, constrói, decora, utiliza todos os modos materiais que experimentam e que comprovam suas ideias, e que lhes oferecem ocasiões de saltos imprevistos contra as coisas, da mesma forma que lhes opõem resistências estranhas e as condições de um mundo diferente que nenhuma previsão, nenhum conhecimento prévio permitem envolver de antemão numa elaboração puramente verbal. *Saber* não basta de modo nenhum a essa natureza múltipla e voluntária; é o *poder* que lhe importa. Não separa de modo nenhum o compreender do criar. Não distingue de bom grado a teoria da prática; a especulação do aumento de poder exterior; nem o verdadeiro do comprovável, nem dessa variação do comprovável que são as construções de obras e de máquinas (VALÉRY, 1998. p. 219).

Esses fundamentos começaram a ser desenvolvidos por Leonardo da Vinci desde a sua infância em Vinci, por meio do contato com a natureza, da observação das árvores e plantas, dos pássaros, insetos e outros animais, da água em movimento nos rios, da chuva e de fenômenos naturais de toda ordem. Ele observava e experimentava, como no dia em que, com o auxílio de seu tio Francisco, dissecou um pequeno réptil para saber como ele era por dentro (A VIDA, 1971). Fazia uso dos recursos naturais que lhes eram acessíveis para experimentar e comprovar suas

ideias refletidas em analogias que mobilizou na sua atividade artística, desde o início na oficina de Verrocchio, e depois para a vida adulta em Florença, Milão, Roma etc.

Já adulto, em Florença, Leonardo da Vinci fez de cada encomenda que recebeu momento de aprendizagem e aprofundamento de seus conhecimentos, pois ficar na superficialidade, definitivamente, não era uma de suas características. Ele uniu seus estudos científicos e a atividade de pintor os tornando inseparáveis, pois segundo Racionero (2008, p. 63), seu método tinha como princípios “a fusão de ciência e arte; e a submissão da ciência à arte”, uma vez que, por meio da ciência, ele buscou respostas e soluções para os problemas que enfrentou em sua atividade artística e colocou a ciência a serviço da arte para que ela passasse a ter status de arte liberal e não mais de arte mecânica, como era considerada na época.

A fusão e submissão mencionadas podem ser identificadas em suas pinturas como Nossa senhora do cravo, Nossa Senhora Benoi, Nossa Senhora Litta, Retrato de Ginevra Benci, A Anunciação, que está no Louvre, e a Anunciação da Galeria Uffizi, retratada na figura 3 (A VIDA, 1971). A pintura é um dos resultados do seu método por analogia, pois nela alguns elementos como a perspectiva, que confere a tridimensionalidade, a vegetação que floresce no chão, a paisagem esfumada ao fundo, os movimentos do anjo com os dedos, o olhar dos personagens, as vestes amarrotadas, conferem à pintura o caráter do real, fazem com que ela se torne uma cena no exato momento do seu acontecimento, que era o objetivo do seu autor.

Figura 3: A Anunciação que está na Galeria Uffizi



Fonte: Isaacson (2017, p. 78).

Para Isaacson (2017), Leonardo da Vinci tinha uma mente inquieta que, constantemente, era atraída por muitos temas e que por vezes consumiam muito de sua criatividade e energia. Sua atividade artística foi, também, científica, pois ele investigava, dedicava tempo, analisava cada detalhe e fazia anotações que poderiam ter sido publicadas como verdadeiros tratados. Leonardo da Vinci criou seu método e técnicas e não copiou o que outros já haviam feito, pois "o seu propósito não é de estudar para copiar, mas transformar e criar de novo, seguindo os ditames da sua imaginação" (RACIONERO, 2008, p. 65), o que fez, muitas vezes, inspirado nas realizações e estudos de pessoas do seu tempo, como Brunelleschi, Alberti e Piero della Francesca.

Um dos episódios que retratam sua atividade científica ligada à Arte ocorreu nesse período em que permaneceu em Florença. Leonardo da Vinci sempre visitava a oficina de Verrocchio e, em uma dessas visitas, se deparou com um grupo de pessoas que vieram encomendar um cavalo de 20 metros de altura. Tratava-se de um monumento em homenagem ao pai de Ludovico Sforza, Francesco Sforza (1401-1466). Leonardo da Vinci acompanhou os preparativos de Verrocchio para tal empreitada e mesmo não sendo o responsável pelo trabalho, isso parece ter despertado seu interesse, pois ele passou a se dedicar a estudos sobre cavalos e sua anatomia (A VIDA, 1971).

Há dentre suas anotações, um número considerável de folhas dedicadas a esse assunto. Há desenhos de cavalos empinados, enfurecidos, focinhos, nervos, pernas, cabeças, músculos e outras partes de um cavalo muitas vezes desenhadas durante a observação de cavalos nas redondezas de Florença. Leonardo da Vinci não se contentou em retratar determinado movimento do animal, apenas ele queria saber o motivo ou os músculos que eram mobilizados para tal movimento, o que o levou a fazer estudos anatômicos cujos resultados eram (são) dignos da publicação de um tratado de anatomia dos cavalos (A VIDA, 1971).

Nesse período de 10 anos, além do que já foi mencionado, Leonardo da Vinci faz muitos estudos preparatórios e desenhos, o que é uma produção significativa, e mesmo tendo produzido bastante, ele decidiu partir de Florença. Isso evidencia outra característica de Leonardo da Vinci, o descontentamento, a necessidade de mudança, de respirar novos ares e de se deslocar em busca de algo novo. É possível que esse nomadismo de Leonardo da Vinci tenha sido algo que o alimentou e que o estimulou por toda a vida, pois a expectativa de estar em um novo lugar e conviver com outras

pessoas desconhecidas, talvez o impulsionasse a buscar impressioná-las com seu talento e assim se dedicar cada vez mais ao seu trabalho (ISAACSON, 2017; WHITE, 2002).

Assim, decidiu ir para Milão, mas não sem antes ter sondado, como bom pesquisador, e descoberto que o Duque daquela Cidade, Ludovico Sforza, O Mouro, estaria à procura de pessoas com suas habilidades para abrilhantar o seu domínio. Leonardo da Vinci partiu em 1482, mas antes, como parte de sua sondagem, mandou uma carta a Ludovico, oferecendo-lhe seus serviços de arquiteto, escritor, escultor, mas de certo não de músico. Na referida carta, ele escreve (ISAACSON, 2017; WHITE, 2002):

Sei como fabricar pontes levíssimas e fortes facilmente transportáveis para perseguir os inimigos ou para fugir, pontes fáceis para colocar e tirar e sei como queimar e desfazer as do inimigo. No cerco de uma cidade sei eliminar a água dos fossos e fazer infinitas escadas e outros instrumentos pertinentes. Sei como fazer ruir qualquer rocha ou fortaleza, e sei construir bombas comodíssimas e fáceis de transportar, farei também carruagens armadas e inatacáveis que entrarão nas fileiras dos inimigos e atrás destas poderão seguir as infantarias. Em tempo de paz creio satisfazer totalmente relativamente a outros em arquitetura e na construção de edifícios públicos e privados, posso ainda fazer esculturas de mármore e bronze e também pintura e poderemos também modelar o cavalo de bronze que será a glória imortal e eterna honra da feliz memória do vosso pai e da ilustre casa sforzesca (A VIDA, 1971).

A carta é extensa e parece um pouco exagerada, pois Leonardo da Vinci fez muitas promessas ao duque, porém, um estudo das anotações feitas por Leonardo da Vinci ao longo de sua vida pode comprovar que tudo o que prometera ele realmente era capaz de projetar, pois há em tais anotações desenhos e apontamentos de cada um dos temas apresentados a Ludovico. Além disso, chama atenção o fato de Leonardo da Vinci registrar sobre suas habilidades em tempos de guerra e de paz e isso tem relação com o momento político em que viveu.

Nesse momento histórico a Itália se dividia em pequenas repúblicas independentes cujo centro político eram as cidades com seus próprios governantes, como os Médici em Florença os Sforza em Milão e outros nas demais cidades. Porém, essa independência gerava certa instabilidade e conseqüentes disputas internas (conflitos armados) como já mencionamos anteriormente. Além dos conflitos internos havia ameaça de invasão por outros países como a França. Por esse motivo, Leonardo da Vinci se oferece como um verdadeiro engenheiro e estrategista militar além de se mostrar útil em tempos de paz como construtor de prédios, escultor e

pintor. Mas o que definitivamente pode ter convencido Ludovico Sforza é a promessa de construir o tal cavalo de bronze que seria "glória imortal e eterna honra da feliz memória do vosso pai e da ilustre casa Sforzesca" (CONSTRUINDO, 2006; ISAACSON, 2017; A VIDA, 1971).

Durante o período que esteve em Milão Leonardo da Vinci produziu mais algumas de suas pinturas como A virgem dos rochedos (figura 4) e o Retrato de Beatriz d'Este.

Figura 4: A virgem dos rochedos do Museu do Louvre



Fonte: Isaacson (2017, p. 249).

Esse período foi um tanto conturbado para ele, pois precisava se desdobrar entre seus estudos científicos, as pinturas encomendadas, o planejamento e construção do cavalo de bronze e em organizar e dirigir espetáculos teatrais que consumiam tempo e energia de Leonardo da Vinci. Esses espetáculos eram oferecidos por Ludovico aos seus convidados e outros membros da corte durante

festas (frequentes) e outras ocasiões como casamentos, por exemplo. Leonardo da Vinci projetava e construía estruturas e cenários, organizava shows que envolviam pirotecnia, dança, feitura de vestimentas e isso encantava o público e o próprio duque de Milão (ISAACSON, 2017; SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Foi nesse período que Leonardo da Vinci conheceu o frade franciscano Luca Pacioli (1447-1517), célebre matemático italiano, cuja vinda para a corte de Ludovico Sforza pode ter sido intermediada por Leonardo da Vinci que tinha interesse em ter um matemático por perto. Como Leonardo da Vinci se dedicava a matemática e a tinha como um dos fundamentos de sua atividade artística a vinda de Pacioli o interessava sobremaneira pois Pacioli poderia o ajudar tanto com a matemática em si quanto com a tradução dos textos matemáticos cuja maioria estavam em grego e latim que Leonardo da Vinci não dominava, ao contrário de Pacioli.

Além disso Da Vinci já havia demonstrado interesse particular pelas publicações do de Pacioli quando adquiriu um exemplar do *Summa de Arithimética* de Pacioli que foi comprado por Leonardo da Vinci e segundo registro em seu caderno, “custou mais do que paguei por duas bíblias”. Além disso Leonardo da Vinci tinha como uma de suas inspirações e fonte de conhecimento Pier della Francesca que foi professor de Pacioli. Nesse contexto Pacioli chegou em Milão por volta de 1496 e sua amizade com Leonardo da Vinci foi produtiva e duradoura (KLINE, 1992; HEMENWAY, 2010; ISAACSON, 2017).

Leonardo da Vinci e Pacioli trabalharam para a corte de Ludovico (como por exemplo nos shows de entretenimento) mas também eram parceiros nos seus projetos pessoais ligados à matemática. Pacioli ensinava matemática a Leonardo da Vinci pois ele pretendia “aprender a multiplicação de raízes com o maestro Luca” bem como “as sutilezas e belezas da geometria euclidiana” (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008f, p. 161) Leonardo da Vinci por sua vez, poderia oferecer o que tinha de melhor ao amigo, sua habilidade sem igual de desenhar, o que se concretizou quando Leonardo da Vinci fez as ilustrações para o livro *De Divina Proportione*. Vale ressaltar que tais ilustrações “foram os únicos desenhos que ele publicou ao longo da vida” (ISAACSON, 2017, p. 230).

A convivência de Leonardo da Vinci com Pacioli, de 1496 a 1499 na corte de Ludovico Sforza, foi de suma importância para os estudos de Leonardo da Vinci sobre matemática, principalmente geometria, foco principal do artista. Quando Leonardo da Vinci menciona aprender as sutilezas da geometria euclidiana possivelmente se

referia a *Os elementos de Euclides* que teria sido adquirido por Leonardo da Vinci, pois ele menciona Campanus nas folhas 483brv e 474br do Códice Atlântico e, como já mencionamos anteriormente, Campanus traduziu *Os elementos* para o latim e essa versão foi impressa em Veneza em 1482. Além disso, Luca Pacioli publicou uma edição de *Os elementos de Euclides* em 1509 (ISAACSON, 2017; SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008; HEMENWAY, 2010).

O que se infere desses fatos é que Leonardo da Vinci deve ter aprendido a geometria Euclidiana com Pacioli, uma vez que não dominava o grego e o latim. Por esse motivo, deve ter contado com a ajuda do amigo que, a essa altura, já deveria estar trabalhando na tradução da edição de *Os elementos* que publicou em 1509. Esse aprendizado foi levado por Leonardo da Vinci por toda a vida. Prova disso pode se encontrar no Códice Atlântico que possui anotações feitas por 40 anos de vida de Leonardo da Vinci e, ao longo desse manuscrito, ele menciona o conteúdo de *Os elementos* além de tentar demonstrar as proposições a seu modo, ou seja, por meio de desenhos que era a ferramenta que dominava. Leonardo da Vinci mobiliza, também, a geometria euclidiana para fazer outras demonstrações de seu interesse, como, por exemplo, a quadratura do retângulo, a duplicação do quadrado e as relações entre volumes de sólidos geométricos que podem ser encontradas no seu Códice Atlântico.

A obra de Leonardo da Vinci é rica e volumosa. Após sua morte em 23 de abril de 1519 em Amboise na França (no solar Cloux) onde ele exerceu as funções de Pintor, Arquiteto, Engenheiro e Mecânico da corte do Rei Francisco I, seus estudos e anotações foram herdados por seu amigo Francesco Melzi (1491-1568). Tais anotações constituíam uma coleção com cerca de 13.000 páginas das quais, atualmente, conhece-se o paradeiro de mais ou menos 7000, boa parte delas reunidas em Códices em bibliotecas da Itália e de outros Países. Dentre essas coleções, está o Códice Atlântico que reúne estudos e desenhos de diferentes áreas de conhecimento pelas quais Leonardo da Vinci transitava com excelência (ISAACSON, 2017; WHITE, 2002).

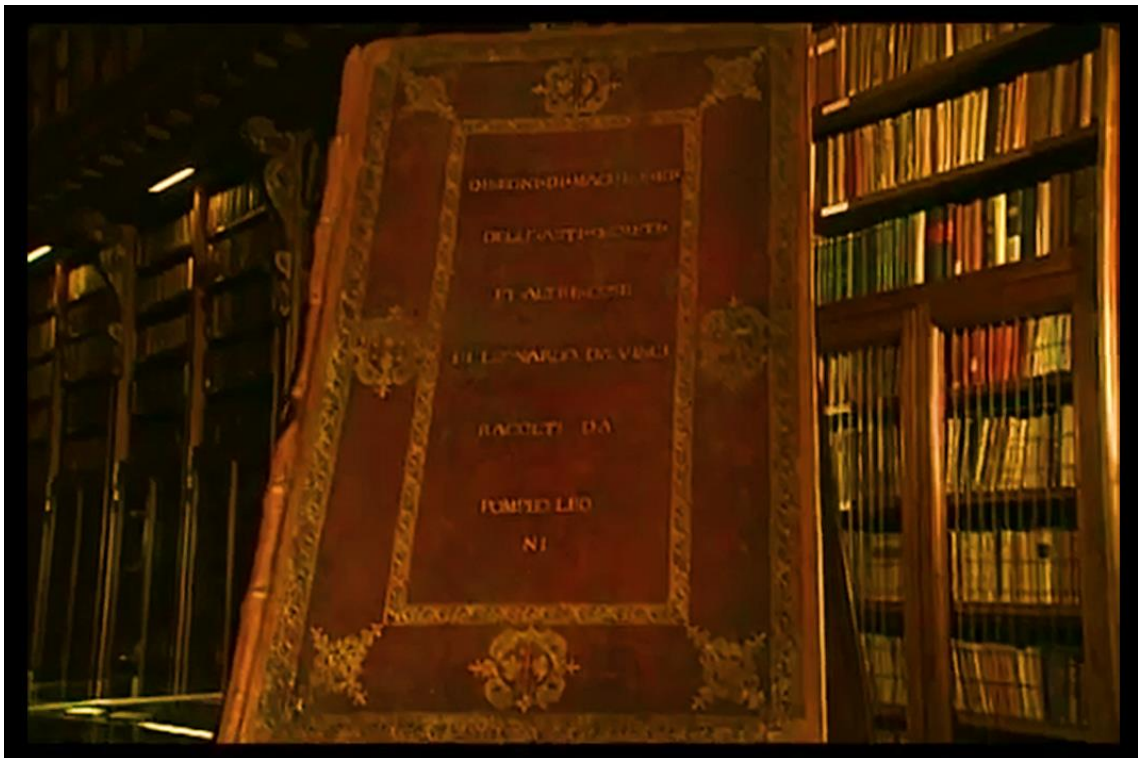
O Códice Atlântico reúne uma coleção de documentos que contém estudos e apontamentos sobre temas como matemática, astronomia, mecânica, botânica, zoologia, artes militares, geografia, distribuídos em 1119 folhas (em torno de 1750 fragmentos) que tratam de anotações de Leonardo da Vinci reunidas em um único volume por Pompeo Leoni no final do século XVI em Milão e que passou por processos

de restauração e de reorganização até chegar ao formato atual que se encontra na Biblioteca Ambrosiana de Milão. Recebe o nome de Códice Atlântico por se tratar de um manuscrito (*códex*) em folhas no formato atlântico, ou seja, de dimensões 65cm x 44cm e pela inscrição que aparece na capa da encadernação original do século XVI:

DISEGNI DI MACHINE ET / DELLE ARTI SECRETI . ET ALTRE COSE / DI
LEONARDO DA VINCI / RACOLTI DA/ POMPEO LEO / NI (Desenhos de
máquinas e de artes secretas e outras coisas de Leonardo da Vinci
recompilados por Pompeo Leoni (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 6-7).

O velho Códice (Figura 5) passou por alguns percalços até a atualidade. Após a morte de Pompeo Leoni, um de seus herdeiros, vendeu o códice para o marques Galeazzo Arconati, pertencente a aristocracia milanese, que o doou para a Biblioteca Ambrosiana em 1637.

Figura 5: O Velho Códice



Fonte: Vídeo da Biblioteca Ambrosiana⁷.

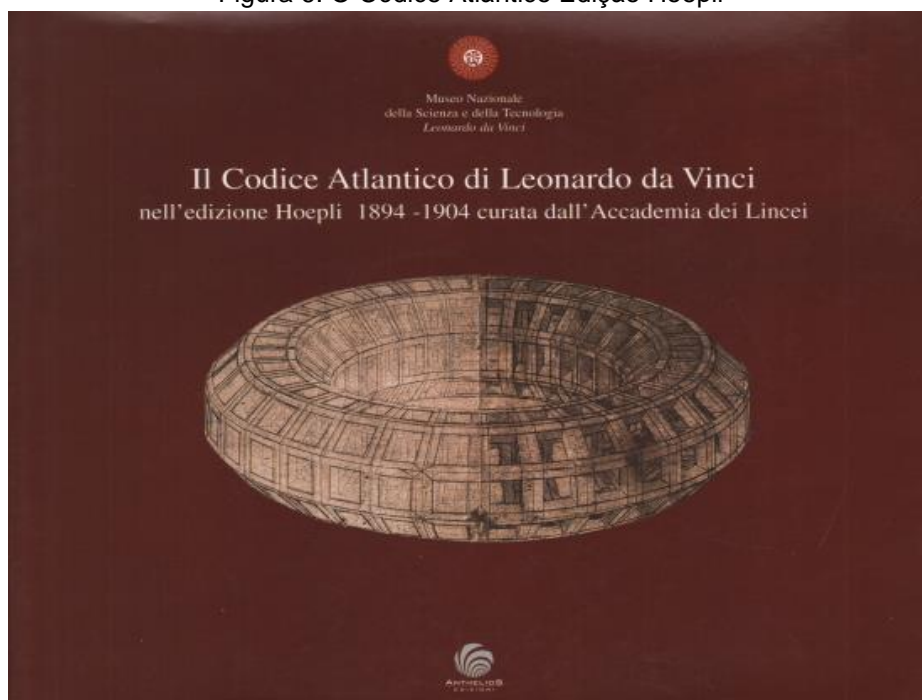
Em 1796 o Rei Napoleão da França conquistou a região da Lombardia (consequentemente Milão) e ordenou que obras da Arte e da Ciência fossem levadas para a França, dentre elas, o Códice Atlântico que ficou na Biblioteca Nacional de

⁷ As imagens das figuras 5 e 8 foram obtidas por meio da captura de tela (print screen) durante a exibição do vídeo LEONARDO DA VINCI: Il Codice Atlantico ala Biblioteca Ambrosiana, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=z5e6dmwbqts>. Acesso em 13/07/2020.

Paris. No entanto, com a queda de Napoleão decidiu-se, no congresso de Viena em 1815, que as obras artísticas deveriam ser devolvidas aos países conquistados. Assim, o códice retornou para a Biblioteca Ambrosiana de Milão (NAVONI, 2012; SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Entre 1894 e 1904 o Códice Atlântico foi transcrito pela primeira vez e publicado pela Accademia dei Lincei. Esse trabalho iniciou com Gilberto Govi (1826-1889) contratado para a Biblioteca Ambrosiana em 1886 para o trabalho com o Códice. Após seu falecimento em 1889 o trabalho foi entregue a Giovanni Piumatti e em 1894 foram impressas algumas partes, cada uma com 40 páginas com a reprodução das folhas de Leonardo da Vinci e a transcrição dos textos. Em seguida o Editor milanês Ulrico Hoepli (1846-1935) deu continuidade ao trabalho que foi concluído em 1904. Foram publicadas, apenas, 280 cópias dessa edição conhecida como Edição Hoepli (figura 6) (NAVONI, 2012).

Figura 6: O Códice Atlântico Edição Hoepli



Fonte: Google imagens⁸.

No período entre 1962 e 1972, ocorreu o processo de restauro do velho Códice no mosteiro de Santa Maria de Gtottaferata, próximo a Roma, sob os cuidados dos monges do laboratório de restauração mais antigo da Itália. As 1119 folhas

⁸<https://www.dimanoimmano.it/it/cp85821/enciclopedie/biblioteche-e-archivi/il-codice-atlantico-di-leonardo-da-vinci-nell-edizione-hoepli-1894-1904-curata-dall-accademia-dei-lincei>

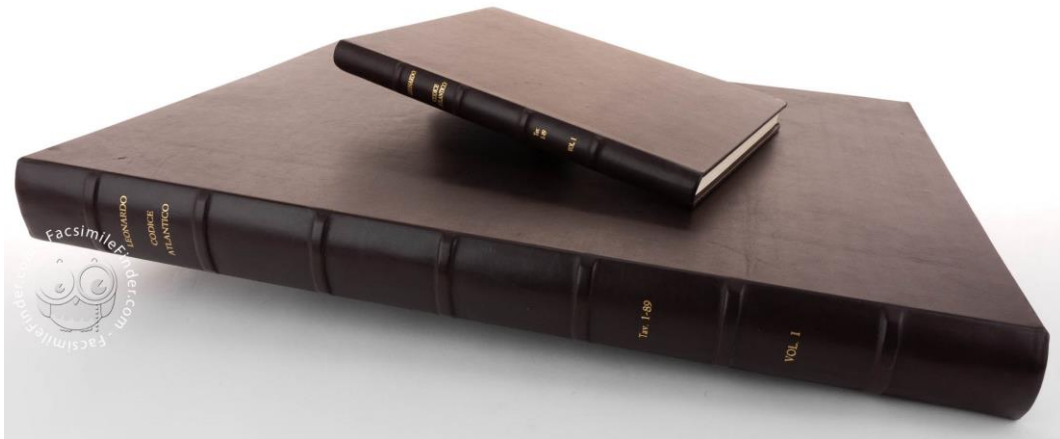
encadernadas por Pompeo Leoni foram desencadernadas, ou seja, retiradas do suporte de papel na qual estavam desde o século XVI. Em seguida, foram novamente encadernadas, agora em 12 volumes (dimensões 44,5 cm x 60,2 cm). Além do processo de restauro, foi feito um trabalho de transcrição crítica e diplomática das anotações de Leonardo da Vinci contidas nas folhas pelo filólogo italiano Augusto Marinoni (1911-1997), estudioso dos manuscritos de Leonardo da Vinci. O trabalho de Marinoni, além da transcrição, contou com uma descrição de cada folha e notas explicativas sobre as anotações de Leonardo da Vinci (NAVONI, 2012; GIUNTI, 2020).

Todo esse aparato crítico foi organizado também em 12 volumes (de dimensões 22 cm x 29,7 cm), um para cada volume de folhas do novo Códice Atlântico cuja organização culminou, portanto, em 24 volumes, 12 com as 1119 folhas e 12 com as respectivas transcrições e aparatos críticos, publicados na década de 1970. A figura 7 retrata um volume de folhas e o seu respectivo volume com os aparatos críticos. Essa edição luxuosa em capa de couro foi reproduzida (em Fac-símile) em 998 exemplares e publicada pela Editora Giunti de Florença. Alguns foram destinados e adquiridos por Bibliotecas e pesquisadores de países pelo mundo, mas não foi o suficiente para a popularização dos trabalhos de Da Vinci devido ao alto custo de cada exemplar (NAVONI, 2012; GIUNTI, 2020).

Após o processo de restauro e reprodução em fac-símile, os originais permaneceram na Biblioteca Ambrosiana e eram expostos em proteções de vidro sem que pudessem ser manuseados, o que permitia somente a visualização de uma pequena parte das folhas, em torno de 12 a 24, já que cada um dos doze volumes abertos poderiam mostrar somente duas folhas ou partes da mesma folha. Isso foi objeto de críticas por parte da comunidade científica, pois esse formato de exposição restringia o acesso ao conteúdo original do Códice. Por esse motivo, em 2009, o códice foi desencadernado novamente e as 1119 folhas foram colocadas separadamente em quadros que as protegiam, mas permitiam a consulta de todas.

As folhas do Códice foram digitalizadas e uma versão em formato digital foi disponibilizada para consulta na Biblioteca Ambrosiana. Concomitante ao processo de digitalização do Códice Atlântico, foram publicadas outras edições em outros formatos, a partir da edição luxuosa já mencionada. Essas edições têm o mesmo conteúdo da primeira, mas são mais simples do ponto de vista dos custos de sua produção e comercialização (NAVONI, 2012).

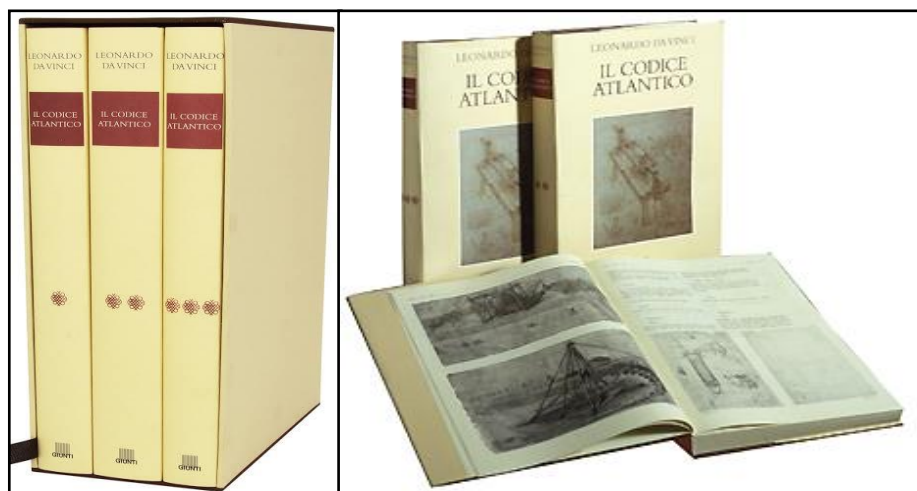
Figura 7: Edição luxuosa do Códice Atlântico



Fonte: <https://www.facsimilefinder.com/facsimiles/codex-atlanticus-facsimile#&gid=1&pid=7>.

Em 2000, foi publicada pela Giunti Editore de Florença uma edição em 3 volumes (figura 8) com folhas e transcrições que contêm o conteúdo dos 24 volumes da edição luxuosa. O primeiro contempla o conteúdo dos volumes de I a IV das folhas e os respectivos volumes com os aparatos críticos, o segundo os volumes de V a VIII e o terceiro os volumes de XIX a XII. Cada volume tem dimensões 23 x 33 cm e totalizam 2000 páginas. A edição teve como organizadores Augusto Marinoni e Carlo Pedretti, que escreveu a apresentação (GIUNTI, 2020).

Figura 8: O Códice Atlântico edição de 2000

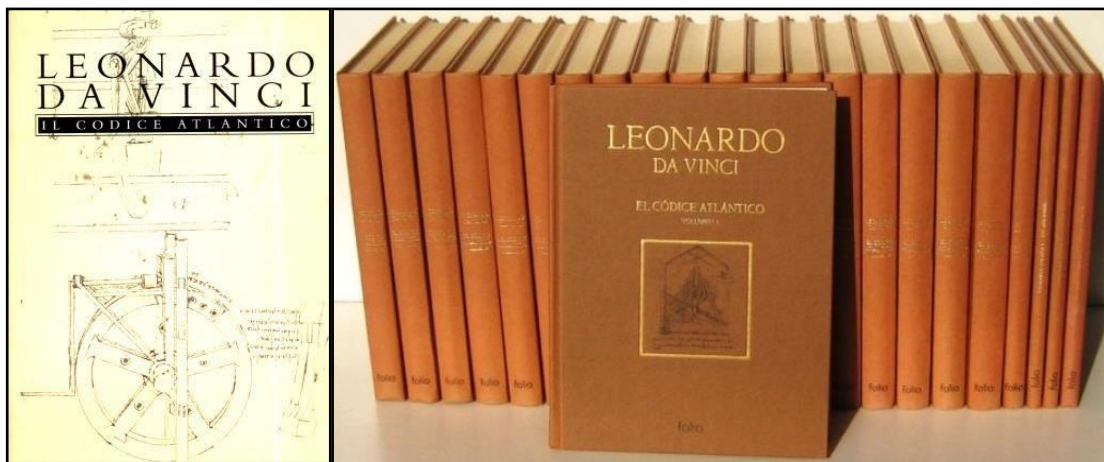


Fonte: <https://www.giunti.it/catalogo/il-codice-atlantico-9788809018105>.

Em 2006, a Giunti Editore de Florença fez uma nova publicação do Códice e organizou todo o conteúdo da edição anterior, agora em 20 volumes, que totalizaram 5000 páginas. Essa mesma edição em 20 volumes foi publicada na Espanha em 2008

pela editora Fólio de Barcelona, que adicionou três volumes à coleção: uma biografia de Leonardo da Vinci, O código do voo e um livro sobre a arte de Leonardo da Vinci. Ainda em 2008, a edição da Fólio foi publicada no Brasil sob a direção de José Luis Sánchez e Meritxell Almarza. Na figura 9, a imagem da esquerda é a capa de um dos 20 volumes da edição de 2006 da Giunti Editore e a da direita retrata a coleção publicada pela editora Fólio de Barcelona, na Espanha, com 20 volumes do Códice Atlântico mais os 3 mencionados.

Figura 9: Edições do Códice Atlântico em 20 volumes



Fonte: <https://www.iberlibro.com/CODICE-ATLANTICO-Biblioteca-Ambrosiana-Milan-vols/30164629059/bd#&qid=1&pid=1>.

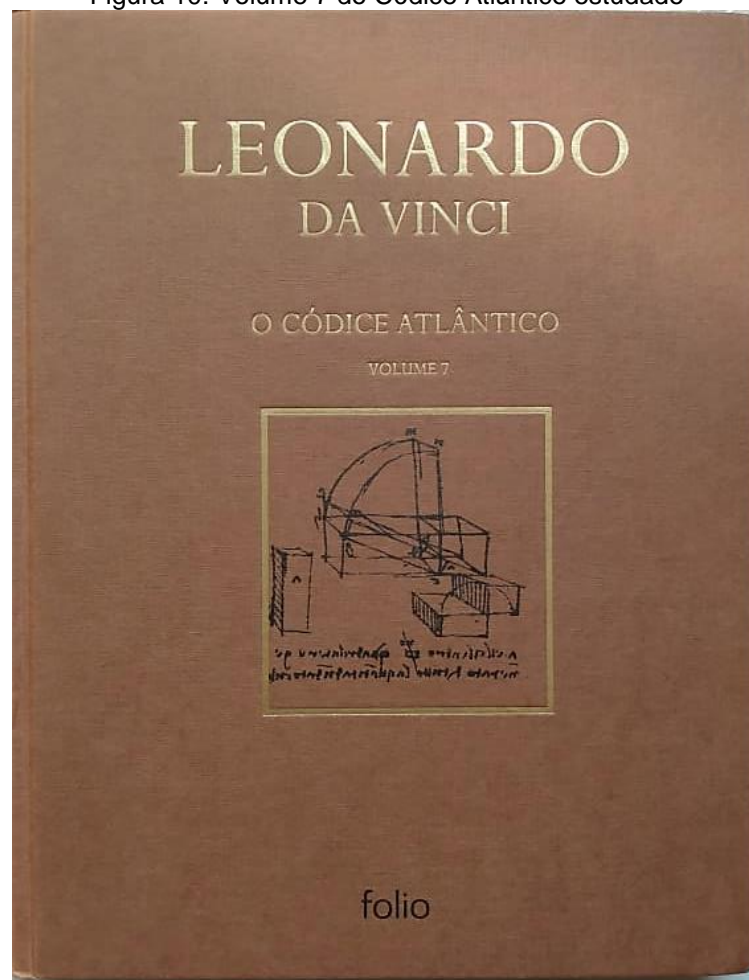
A publicação brasileira foi feita no mesmo formato da espanhola, no entanto, segundo informações que obtivemos de Meritxell Almarza, por mensagem de E-mail, Ela e José Luis Sánchez só participaram da publicação dos 10 primeiros volumes do Códice mais a *Biografia de Da Vinci* e *O voo*, pois a editora Fólio encerrou a colaboração antes que todos os volumes fossem publicados. De acordo com Meritxell Almarza, é possível que outros volumes (de 11 a 20) tenham sido publicados no Brasil, mas não pôde confirmar se isso ocorreu. Buscamos em sites de vendas de livros e de bibliotecas e só encontramos os 10 primeiros volumes da publicação brasileira que contemplam as 602 primeiras folhas do Códice Atlântico com seus respectivos aparatos críticos (transcrição, descrição e notas). Foram esses 10 volumes que conseguimos adquirir e que estudamos na pesquisa que ora relatamos.

Todo esse processo de publicação (digital e impressa) do Códice Atlântico contribuiu, sobremaneira, para sua disseminação e facilitou o acesso de estudiosos, pesquisadores e demais interessados em conhecer parte da obra e do legado de

Leonardo da Vinci. As publicações que mencionamos traçam o caminho trilhado até a versão que usamos nesta pesquisa, mas possivelmente outras publicações do Códice devem ter sido feitas a partir da primeira edição em fac-símile da Giunti Editore de Florença. Além das edições completas do Códice Atlântico, há também livros publicados com parte das folhas do Códice que fazem uma apresentação sintética dos principais temas abordados.

As edições do Códice Atlântico - de 2000 em três volumes, de 2006 em 20 volumes (ambas da Giunti Editore) e a da Editora Fólio, de 2008, em 20 volumes - contêm o conteúdo completo do Códice e diferem somente pelo idioma da capa, dos elementos pré-textuais (como a apresentação), da descrição de cada folha, das notas explicativas e dos elementos pós-textuais, que acompanham o idioma do País de publicação. A edição brasileira que estudamos esses elementos estão em Língua Portuguesa. A figura 10 retrata o volume 7 da coleção brasileira.

Figura 10: Volume 7 do Códice Atlântico estudado



Fonte: Acervo dos autores.

Para fazer uma caracterização mais específica do Códice Atlântico, inicialmente foi feito em um estudo exploratório dos 10 volumes pesquisados, para que se conhecesse o seu conteúdo. Esse estudo foi guiado por algumas questões como: O que é o Códice Atlântico? Qual o seu conteúdo? Como os seus volumes estão apresentados e organizados? Os resultados desse estudo possibilitaram a caracterização pretendida, pois a coleção estudada está organizada como informado a seguir.

O volume 1 contém capa e contracapa e os seguintes elementos:

- ✓ *Pré-textuais*: falsa folha de rosto, folha de rosto (com títulos, dados dos organizadores, ficha catalográfica), uma apresentação de Carlo Pedretti, notas sobre os critérios de transcrição dos textos de Leonardo da Vinci, de Pietro C. Marani e as referências das obras mais citadas pelos seus organizadores na coleção;
- ✓ *Textuais*: página com o título *O Códice Atlântico*, folhas com desenhos e anotações de Da Vinci numeradas de 1 a 72 reto (r) e verso (v). Após a folha 72, iniciam as páginas que contêm os aparatos críticos (descrição, transcrições e as notas explicativas) referentes ao reto (parte da frente da folha) e ao verso de cada uma das 72 folhas do Códice Atlântico;
- ✓ *Pós-textuais*: apêndices (correspondência entre a antiga e a nova numeração das folhas do Códice Atlântico, correspondência entre a nova e a antiga numeração, resumo de matérias e índice). Esse volume contém 288 páginas e todas são contadas, porém, as que contêm as folhas de desenhos e anotações de Leonardo da Vinci, não contêm numeração.

Os outros nove volumes estudados têm organização similar ao volume 1, com exceção dos elementos pré-textuais: *apresentação, notas sobre os critérios de transcrição dos textos de Leonardo da Vinci e referências das obras mais citadas na coleção*, que se referem à coleção inteira e, por isso, estão somente no volume 1. Quanto às folhas do Códice Atlântico: o volume 2, com 286 páginas, contém as folhas de 73 a 140; o volume 3 (288p.) contém as folhas de 141 a 208; o volume 4 (286p.), de 209 a 265; o volume 5 (286p.), de 266 a 325; o volume 6 (286p.), de 326 a 385; volume 7 (286p.), de 386 a 434; volume 8 (290p.), de e 435 a 487; volume 9 (288p.), de 488 a 542; e o volume 10 (288p.) contém as folhas de 543 a 602 do Códice Atlântico.

Ressaltamos, portanto, que o Códice Atlântico reúne uma coleção de documentos que abarcam praticamente todo o período de vida artística e científica de Leonardo da Vinci, uma vez que foram produzidos por ele no período de 1478 a 1519 (41 anos, aproximadamente). Nele contém estudos e apontamentos práticos e teóricos sobre temas como: arquitetura, arte da guerra, mecânica, astronomia, hidráulica, óptica, anatomia, botânica, zoologia, estudos sobre o voo, estudos sobre a água, textos literários, anotações autobiográfica, perspectiva, aritmética e geometria, este último o foco de nossa pesquisa (ISAACSON, 2017; SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Toda essa pluralidade de temas foi estudada por Leonardo da Vinci ao longo de sua vida, motivado por sua atividade artística, mas, principalmente, por sua curiosidade, vontade de conhecer e aprender sobre tudo o que a ele se apresentava. Alguns temas como a arte da guerra, por exemplo, têm relação com períodos de sua vida em que esteve a serviço de Reis e generais que exigiram dele tal demanda; outros como a anatomia foram fruto de seu interesse pessoal em conhecer e em retratar corpos da maneira mais perfeita possível em suas pinturas.

A matemática, mais especificamente a geometria, foi tema de estudo de Leonardo da Vinci ao longo de sua vida. Nela, ele buscou elementos que fundamentassem sua arte cientificamente e, com isso, agregassem à sua atividade artística (particularmente à pintura) maior respeito e credibilidade. Na verdade, além da geometria, ele buscou tais elementos em outros conhecimentos científicos aos quais teve acesso, dentre os quais pode-se destacar a óptica e a anatomia. Mas por qual motivo Leonardo da Vinci se preocupava em trazer tais elementos para a pintura?

Ocorre que há algum tempo discutia-se sobre o grau de importância de determinados tipos de arte. A pintura era tida como uma arte mecânica cuja execução exigia, apenas, exercícios mecânicos, sem a necessidade de mobilizar o pensamento; por outro lado, as narrativas históricas, a poesia e a música, por exemplo, seriam de maior valor no contexto social e cultural da época. Diante disso, Leonardo da Vinci, cuja principal atividade artística foi a pintura, se dedicou a estudar temas científicos e estabelecer analogias com os resultados de suas observações da natureza e experimentações para mobilizar elementos para a pintura e elevar seu status entre as artes em geral (ISAACSON, 2017).

Além dessa resignificação de temas para a pintura, Leonardo da Vinci precisava defender a importância da pintura em debates públicos, que eram uma das

principais atrações das noites do castelo Sforzesco, sede da corte de Ludovico Sforza em Milão. Recebiam o nome de Paragones (comparação, em italiano) e tinham como objetivo comparar “o valor de diversas disciplinas intelectuais, da matemática a arte, passando pela filosofia”. Leonardo da Vinci se destacou em um paragone que ocorreu em fevereiro de 1498, cujo debate versava sobre geometria, escultura, música, pintura e poesia (ISAACSON, 2017, p. 285).

Ele fez uma rigorosa defesa científica e estética da pintura – que na época era considerada uma arte mecânica -, argumentando que ela deveria ser tida na verdade como a mais elevada de todas as artes liberais, superando a poesia, a música e a escultura (ISAACSON, 2017, p. 285).

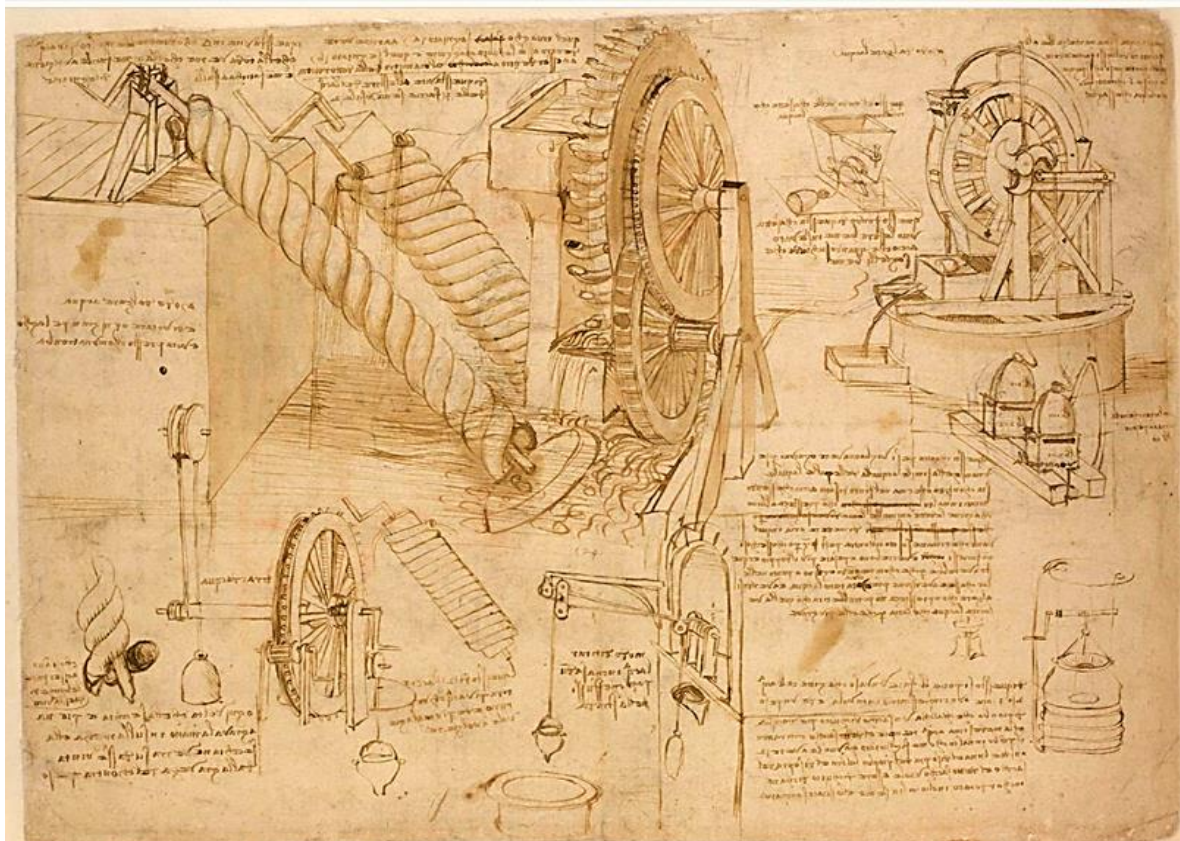
Essas defesas públicas, das quais participavam artistas, intelectuais, governantes e membros de famílias influentes da época, para os que faziam a defesa, tinham uma motivação particular: atrair patrocinadores para seus projetos pessoais, seja como artista ou intelectual, o que dependia de uma boa argumentação e poder de convencimento. Esse era um fator que motivava tais defensores a estudar, para construir seus argumentos e se preparar para defendê-los publicamente, o que Leonardo da Vinci fazia incessantemente, pois para ele (e outros), era uma questão de sobrevivência pessoal e de elevação do seu status na sociedade (ISAACSON, 2017).

A preocupação de Leonardo da Vinci com o status social de sua atividade se justificava por ser uma função em ascensão, em busca de prestígio e reconhecimento, pois vale lembrar que Leonardo da Vinci era mestre-artesão e não havia frequentado a academia da mesma forma que outros pintores da época, ao passo que os filósofos, médicos e estudiosos da astronomia, por exemplo, o haviam feito, o que lhes conferia um status mais elevado na sociedade e, conseqüentemente, poderiam ter maiores possibilidade de atrair patrocinadores.

A necessidade de defesa da pintura, conseqüentemente a sua fundamentação nas ciências da época, aliada à mente inquieta de Leonardo da Vinci, ávida por conhecimento, o impeliu a estudar, investigar sobre temas variados e a buscar nesses temas tais fundamentos. Essa atividade de estudo e investigação científica foi materializada por Leonardo da Vinci em anotações por meio da escrita e do desenho que versavam sobre múltiplos temas (já citados anteriormente) e que podem ser encontrados nas folhas do Códice Atlântico.

O estudo exploratório mencionado comprovou que os 10 volumes tomados para este estudo contêm temas variados. A exemplo desses temas, a folha 26v que está no volume 1 (figura 11) trata da hidráulica, mais precisamente o levantamento de água de um nível para outro mais elevado. A folha contém um grupo de desenhos que envolvem polias giratórias, estruturas longilíneas movidas por manivelas, água, polias com pesos suspensos e outros desenhados, possivelmente, a partir de estudos que Da Vinci fez sobre as produções de Arquimedes. Destacamos uma máquina que está na parte superior esquerda composta por duas estruturas, uma circular e outra triangular, circundadas por tubos que nelas são enrolados como se formassem uma rosca.

Figura 11: Folha 26v. Levantamento de água



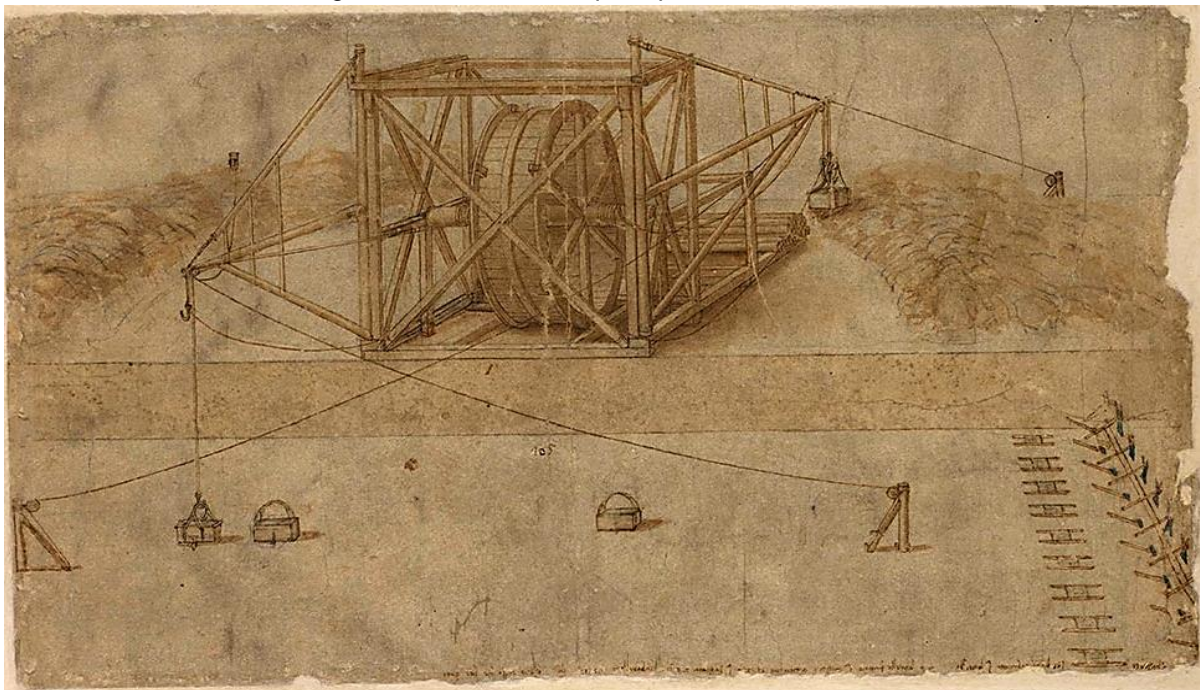
Fonte: Sánchez e Almarza (2008a p. 80).

A extremidade inferior dessa estrutura está submersa no que parece ser água corrente ou um reservatório; já a extremidade superior está apoiada em uma parede de um reservatório que fica em um nível superior ao do primeiro. O que se conclui com a observação do desenho é que o movimento giratório da estrutura com tubos

conduziria a água por essa tubulação para o nível mais elevado (SÀNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Além dessa máquina, outras duas de formato diferente estão na folha e foram pensadas e desenhadas para o mesmo fim: a elevação da água. As máquinas são circulares e têm conchas que, com o giro, se encheriam na parte baixa e despejariam a água na parte mais elevada. Tais máquinas fazem parte de um grupo significativo de projetos e desenhos de Leonardo da Vinci contidos no Códice Atlântico, pois ele se preocupava em projetar artefatos que pudessem facilitar o trabalho do homem e lhe dar mais produtividade. Ele se preocupava com a automação dos serviços laborais, com o desenvolvimento e organização das cidades e com o transporte de mercadorias e insumos entre elas. Um exemplo do que dizemos é a sua preocupação com a construção de canais que interligassem cidades e vilas e as abastecessem do que precisavam para se manter e se desenvolver, o que está retratado na figura 12.

Figura 12: Folha 3r. Máquina para escavar canais

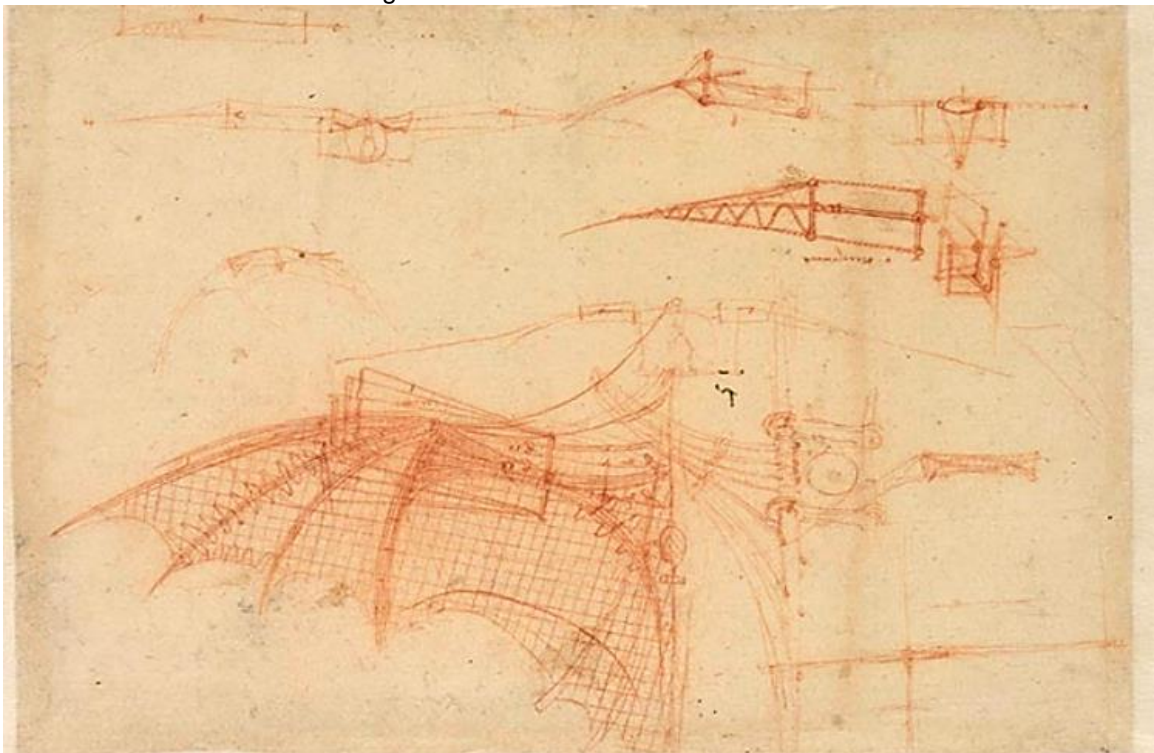


Fonte: Sánchez e Almarza, (2008a p. 27).

A folha 3r retrata uma grande máquina para escavar canais. Trata-se de uma máquina projetada para cavar, carregar as caixas com o material retirado e as esvaziar em diques, ou seja, uma máquina automática que precisaria de pouca mão de obra humana, a exemplo da automação citada anteriormente.

O voo dos pássaros e insetos foi estudado profundamente por Leonardo da Vinci, pois a superficialidade não era uma de suas características, ele se dedicava ao extremo e aliava essa dedicação à sua mente privilegiada e à sua habilidade em desenhar. Ele observava a natureza, elaborava suas conjecturas e as objetivava por meio de anotações e, principalmente, desenhos. Analisava os efeitos do ar quando se projetava contra as asas dos pássaros, estudava a trajetória do voo e as mudanças provocadas nessa trajetória. Fazia cálculos sobre a proporcionalidade entre o tamanho das asas e o peso do corpo e projetava asas mecânicas, como a que está retratada na folha 70br do volume 1 (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Figura 13: Folha 70br. Asa mecânica

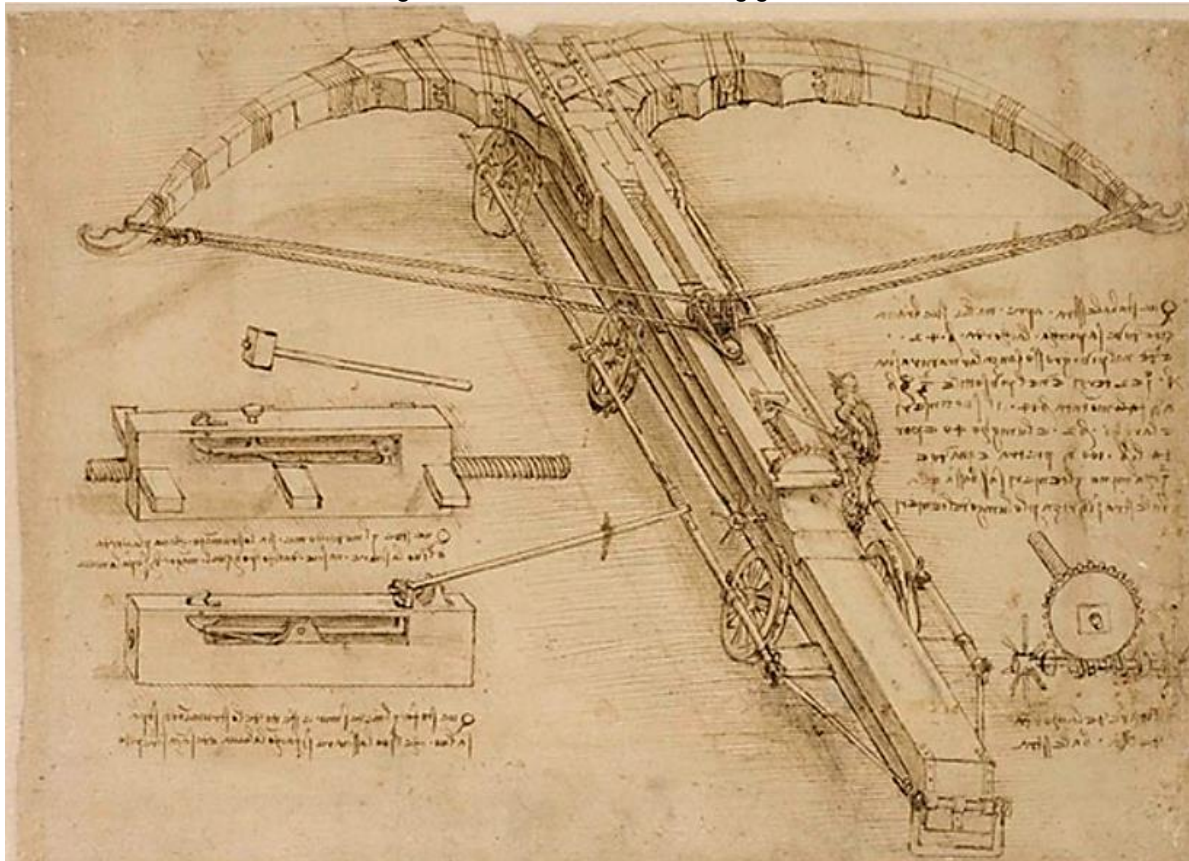


Fonte: Sánchez e Almarza (2008a p. 171).

Estudos sobre o voo dos pássaros foi um tema que acompanhou Leonardo da Vinci por toda sua vida, pois tinha como um de seus objetivos realizar o sonho humano de voar. Ele observou por longos anos os pássaros e insetos (como a libélula) voando e fez inúmeras anotações que relacionavam suas observações com os seus estudos de matemática e física, por exemplo. Desenhou, equipamentos de voo como paraquedas, helicópteros e asas mecânicas, como a que está projetada na folha 70br (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Leonardo da Vinci dedicou parte de seus estudos à engenharia e à arquitetura militar, projetando fortalezas, carruagens com foices giratórias, canhões, metralhadoras, catapultas, escadas para ataque de fortalezas, barcos de guerra e outros equipamentos para ataque e defesa, como a arma da folha 149br, do volume 3, retratada na figura 14.

Figura 14: Folha 149br. Besta gigante



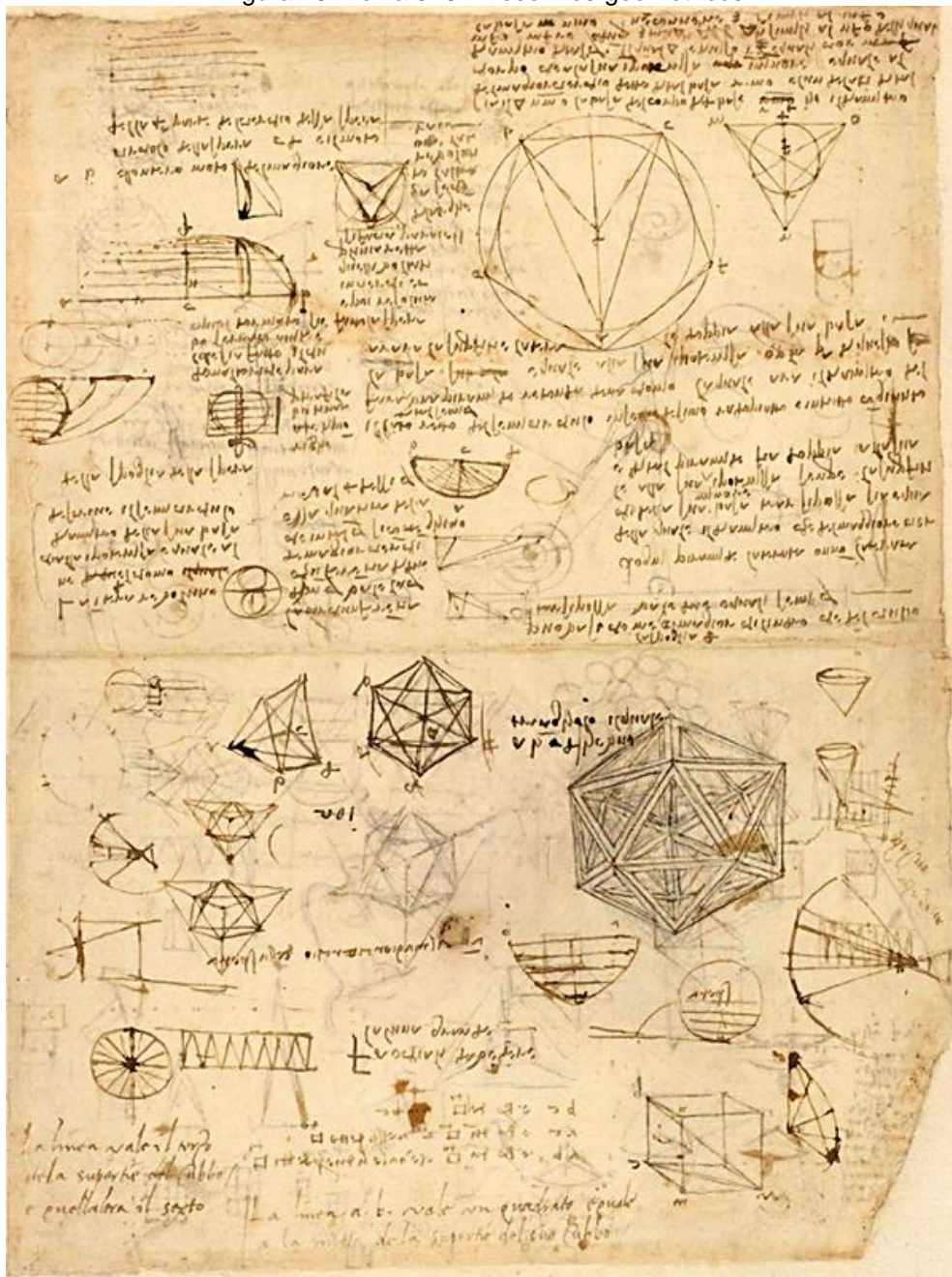
Fonte: Sánchez e Almarza (2008c p. 27).

Trata-se de uma besta gigante, a julgar pela comparação com o desenho do homem que aciona o mecanismo de disparo. A arma está apoiada sobre uma carruagem com três pares de rodas e os desenhos em destaque no lado esquerdo parecem ser os mecanismos de disparo.

A matemática refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci se refere, principalmente, à aritmética e à geometria. Esta última está refletida em parte significativa das folhas do Códice Atlântico, como por exemplo, na folha 518r, do volume 9, retratada na figura 15. A folha contém um grupo de desenhos geométricos e anotações dentre os quais se pode visualizar cubo, esfera, semiesfera, triângulo, pentágono, círculo e poliedro. Dois desenhos se destacam: na parte superior, o

desenho de um pentágono inscrito e circunscrito, e na parte inferior um poliedro com faces triangulares. Leonardo da Vinci foi aluno e amigo do matemático Luca Pacioli e desenhou os poliedros do livro *De Divina Proportione* publicado por Pacioli, ou seja, o desenho do poliedro destacado pode ter relação com esse trabalho de Da Vinci (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Figura 15: Folha 518r. Desenhos geométricos



Fonte: Sánchez e Almarza (2008i, p. 81).

As folhas do Códice Atlântico sobre geometria tratam, também, de outros temas geométricos como, por exemplo, o teorema de Pitágoras, a duplicação do cubo, a

quadratura de polígonos e quadratura do círculo. Vale ressaltar que o problema da quadratura do círculo foi objeto de estudo de Leonardo da Vinci por um período de tempo considerável, como veremos mais adiante. Porém, além das folhas com desenhos e anotações, há folhas do Códice Atlântico que não contêm desenhos (somente anotações), como a folha 201r (figura 16), que está no volume 3 da coleção estudada.

A folha contém quatro colunas de texto que são argumentos sobre “acidentes do movimento das águas” a serem desenvolvidos por Leonardo da Vinci, que tinha a intenção de organizar um tratado sobre a água. Água, sem dúvida, foi um dos elementos da natureza cuja observação fez com que Leonardo da Vinci estabelecesse analogias importantes com sua atividade artística, como a conservação de volume, por exemplo (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008c, p. 252).

Figura 16: Folha 201r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008c p. 143).

As folhas apresentadas anteriormente são representativas do conteúdo das 602 folhas do Códice Atlântico estudado. Elas são exemplos dos múltiplos temas de pesquisas de Leonardo da Vinci registrados por ele por meio de desenhos e anotações. Boa parte dessas folhas (seguramente mais da metade) contém registros que refletem uma geometria que foi mobilizada por Da Vinci em seus estudos,

principalmente *as folhas que com desenhos e anotações sobre a geometria propriamente dita ou sobre geometria aplicada a outros temas*. Quase a totalidade das folhas com algum tipo de registro sobre geometria apresenta elementos semelhantes a aqueles contidos em temas da geometria escolar, o que possibilita o estabelecimento de relações da geometria refletida no Códice com essa geometria. Assim, olhando por esse ângulo, teríamos que analisar mais de 300 folhas do Códice Atlântico, o que poderia gerar um desgaste de energia imensurável e até prejudicar o desenvolvimento e a conclusão da pesquisa.

Sabemos que em uma pesquisa de cunho qualitativo, como a que desenvolvemos, o aspecto quantitativo não é o principal elemento visado, ao passo que uma seleção bem elaborada e justificada pode contribuir para a delimitação do objeto a ser analisado e para o aprofundamento da análise qualitativa realizada. Portanto, a seguir, trataremos dos procedimentos que seguimos para a categorização e seleção das folhas e dos fundamentos teóricos e metodológicos tomados para a análise.

Sobre a seleção das folhas analisadas, os fundamentos e procedimentos de análise: uma pré-análise

Anteriormente apresentamos uma caracterização geral do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci evidenciando alguns dos principais temas do conteúdo de suas folhas. É possível perceber que, para cada tema destacado, há uma pluralidade de possibilidades de pesquisas com focos variados. Se for considerado um único tema, como a geometria, por exemplo, há diferentes possibilidades para que as folhas sejam objeto de problematizações de pesquisas. Além dessa gama de possibilidades, é preciso considerar que os 10 volumes que compõem o estudo contêm 602 folhas com desenhos e anotações, um número significativo para ser tomado como objeto de estudo em uma pesquisa qualitativa como a que desenvolvemos. Diante desses fatores, como selecionar folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, com foco em possíveis relações do seu conteúdo com a geometria escolar? Quais os procedimentos e fundamentos para análise das folhas selecionadas? Essas foram as questões que motivaram o trabalho relatado nesta parte do texto.

No que se refere aos procedimentos metodológicos de seleção das folhas, o estudo exploratório inicial, mencionado anteriormente, foi suficiente para que se tivesse um panorama geral do Códice Atlântico e de seu conteúdo no que se refere

aos diferentes temas contidos nas anotações e desenhos de Leonardo da Vinci. No entanto, foi preciso aprofundarmos esse estudo no intuito de nos apropriarmos dos temas e procedermos a seleção das folhas para serem analisadas, com foco em possíveis relações do seu conteúdo com a geometria escolar. Assim, prosseguimos com o estudo dos 10 volumes com foco em selecionar, dentre as 602 folhas, aquelas que possibilitassem o estabelecimento de relações da geometria nelas registradas (ou refletidas) com a geometria escolar.

Desse estudo emergiu a necessidade de se fazer uma categorização das folhas do Códice Atlântico, pois à medida que avançamos, percebemos uma recorrência de temas, ou seja, alguns dentre os temas das anotações e desenhos eram recorrentes em folhas nos 10 volumes estudados. Dentre os mais recorrentes, podemos citar as folhas que contêm desenhos e anotações sobre: projetos de máquinas para escavação de canais; projetos e plantas de edificações; estudos sobre reflexão da luz; teoria das sombras; estudos sobre redução do atrito; duplicação do quadrado e do cubo; cálculos aritméticos e inscrição de polígonos. Além disso, percebemos que alguns desses temas se relacionavam, o que possibilitou a organização das 602 folhas estudadas em 7 categorias: 1) *Engenharia*; 2) *Arquitetura*; 3) *Artes*; 4) *Estudos científicos*; 5) *Aritmética*; 6) *Geometria*; e 7) *Outros*. Os quantitativos destas categorias estão descritos no quadro 2.

Quadro 2: Categorias das folhas do Códice Atlântico

Temas	Total de folhas
Engenharia	141
Arquitetura	56
Artes	27
Estudos científicos	148
Aritmética	26
Geometria	176
Outros	28
Total	602

Fonte: Elaboração dos autores.

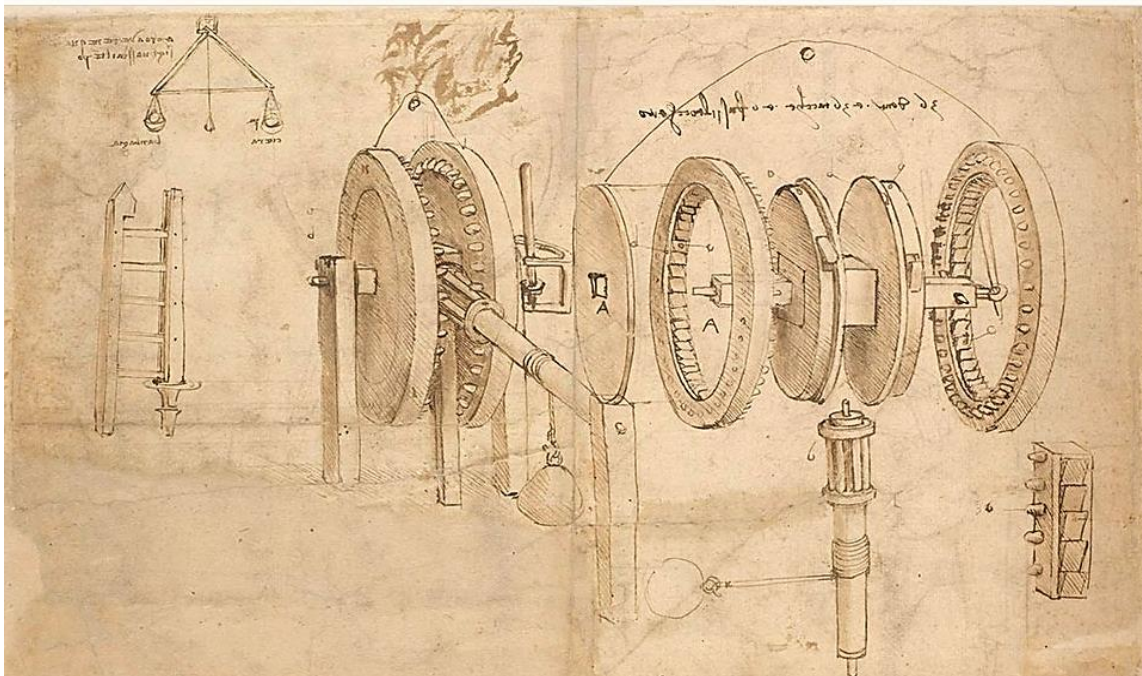
Antes de discorrer sobre as categorias, vale ressaltar que fazer uma categorização das folhas do Códice Atlântico não é tarefa fácil, pois a maioria delas não trata de um único tema, na verdade, a minoria das folhas versam sobre tema único. A folha 310 do volume 5, por exemplo, possui desenhos e anotações sobre *reflexo da luz solar na água, como confortar a própria velhice, cores para pintar,*

porque a Lua não cai?, princípios de mecânica, óptica e dinheiro recebido. Essa variedade de temas dificulta uma categorização.

Portanto, o que consideramos para essa categorização foi o tema que se destaca, aquele que é predominante nos registros materializados nos desenhos e anotações de cada folha. No caso da folha 310, o que se destaca são os estudos científicos, categoria na qual ela foi inserida. O que queremos esclarecer é que, quando incluímos uma folha na categoria engenharia, por exemplo, não significa que ela não contenha nenhum registro de outra área e sim que os aspectos ligados à engenharia se destacam. Passemos às categorias mencionadas.

A categoria Engenharia contém folhas com desenhos e anotações sobre projetos de máquinas, engrenagens, armas de guerra, veículos, moinhos movidos a vento ou água, aparelhos para o trabalho com pintura, escultura e colheita, fornos a lenha, Instrumentos hidráulicos, dentre outros projetos e inventos que Da Vinci idealizou, principalmente com foco na automatização do trabalho humano que, na época, era prioritariamente manual.

Figura 17: Folha 30r



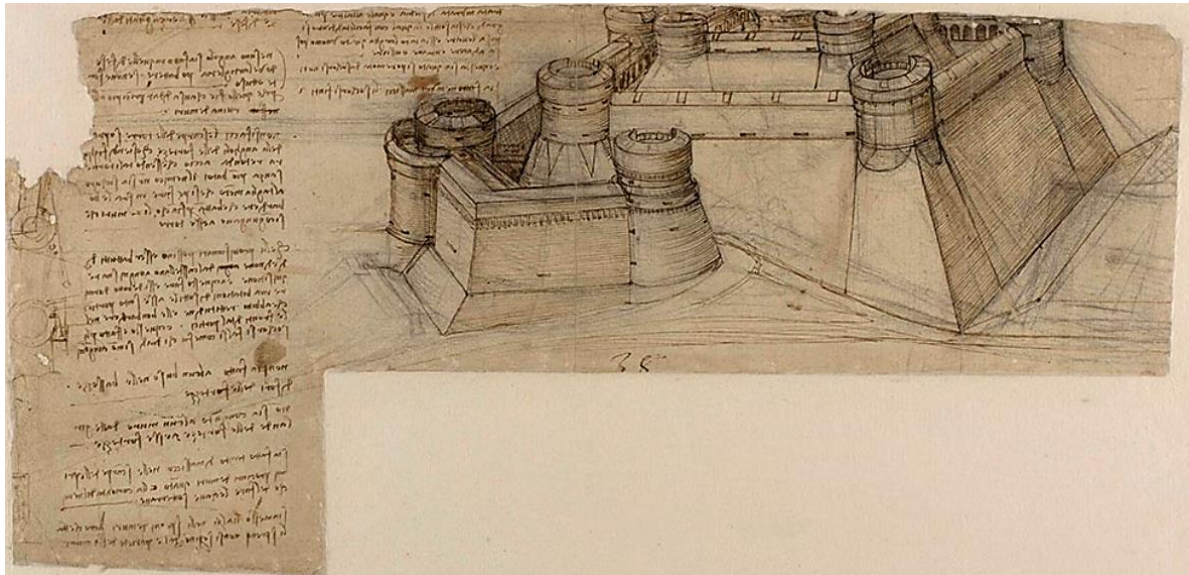
Fonte: Sánchez e Almarza (2008a, p. 90).

Como exemplo dessa categoria, destacamos a folha 30r (figura 17) cujo desenho principal retrata um aparelho para levantar pesos por meio do “movimento alternado de uma alavanca vertical que faz girar, mediante as rodas dentadas, a

árvore horizontal, sobre a qual se enrola a corda que levanta um grande peso” (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008a, p. 211). À direita, está o desenho do mesmo aparelho separado, peça por peça, o que evidencia a preocupação de Da Vinci com o detalhamento e a sua precisão em projetar seus inventos.

A exemplo dessa categoria, a folha 117r, que está no volume 2 (figura 18), retrata o desenho de uma fortaleza a ser construída em um terreno acidentado. A fortaleza foi pensada em detalhes para resistir aos ataques e bombardeios de canhões potentes. Suas paredes espessas e inclinadas em relação à horizontal, e as torres arredondadas, foram projetadas de tal forma para reduzir a força do impacto das balas de canhão e, conseqüentemente, aumentar sua resistência. Percebe-se ainda que a fortaleza possui o formato poligonal e que as torres foram posicionadas nos vértices do polígono, o que facilita a visualização do oponente. Como já mencionamos, esse tipo de projeto foi motivado pelos constantes conflitos armados na época e pelo fato de que as antigas fortalezas (algumas construídas pelo império romano há séculos) facilmente sucumbiam às armas de guerra desenvolvidas na época de Da Vinci.

Figura 18: Folha 117



Fonte: Sánchez e Almarza (2008b, p. 107).

A atividade de projetar as fortalezas, seus mecanismos de defesa e ataque recaia sobre os artistas da época, que passaram a ser, também, arquitetos e engenheiros (dentre outras funções por eles desempenhadas) e tinham, portanto, um papel importante nas cortes de reis e governantes da época. Leonardo da Vinci

passou a vida trabalhando para esses governantes, por isso seus escritos são repletos de projetos como o que discutimos, retratado na folha 117r do Códice Atlântico.

Na categoria Artes, incluímos folhas cujo conteúdo trata de pintura, literatura, escultura e outras atividades ligadas às artes praticadas na época. São folhas que contêm perfis grotescos, registros escritos sobre poemas, fábulas, facécias, adivinhações, anotações sobre preparo de tintas, pastas e óleos para pintura, posicionamentos do pintor em relação ao que será pintado, normas a serem seguidas pelo pintor e desenhos e esboços de bustos e rostos humanos, como os retratados na figura 19.

Figura 19: Folhas 239 e 399

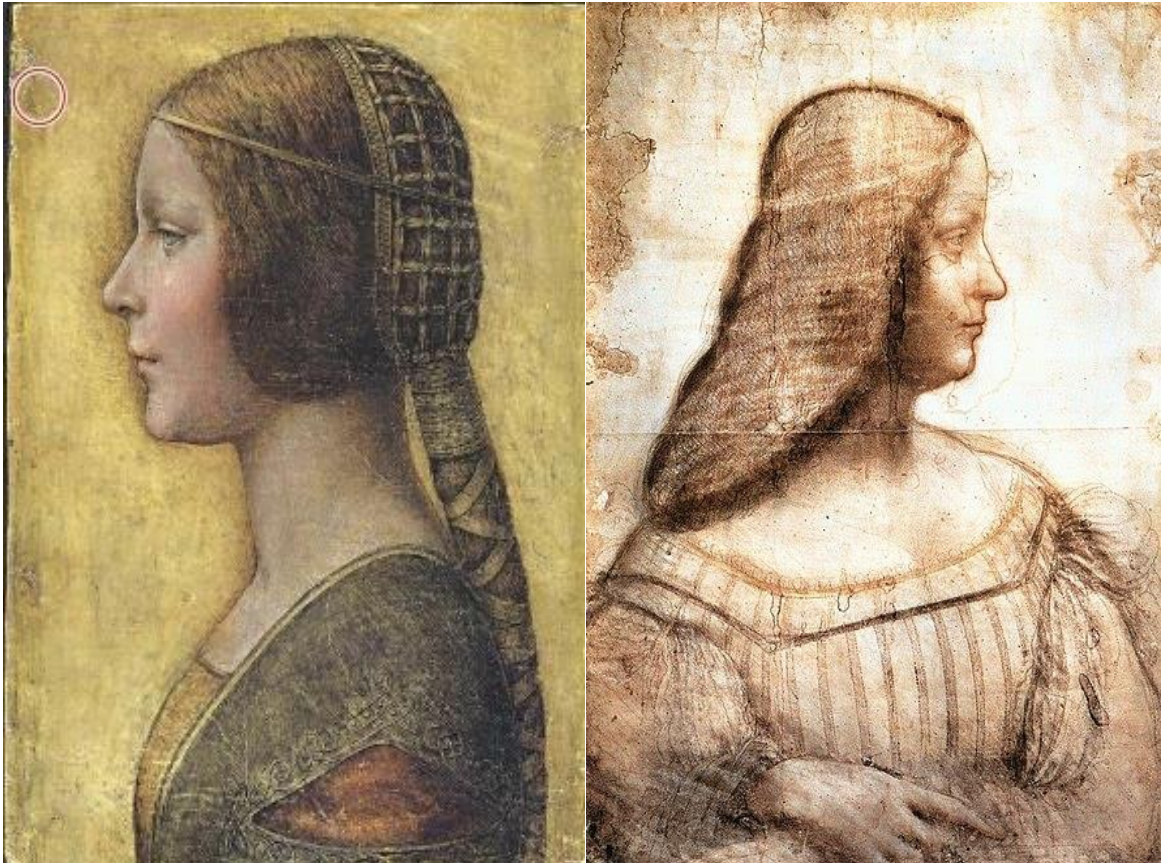


Fonte: Sánchez e Almarza (2008d, p. 73; 2008g, p. 48).

A folha 239r, que está no volume 4, e a folha 399r, que está no volume 7 da coleção estudada (figura 19), contêm desenhos de rostos que parecem ser femininos, a julgar pelo busto que está na folha 399r da direita. São desenhos preparatórios e devem ter sido feitos quando Da Vinci trabalhava na feitura de um dos seus quadros, como os que destacamos na figura 20. São dois retratos que não foram totalmente acabados por Da Vinci: *A bela Princesa*, que faz parte de uma coleção particular, e retrato de *Isabella d'Este*, que está no Museu do Louvre. Percebe-se que os perfis

estão na mesma posição daqueles pintados nos retratos. Não queremos dizer com isso que os desenhos das folhas 239 e 399 se referem aos retratos em destaque, mas que Leonardo da Vinci fazia estudos e desenhos preparatórios para suas pinturas, como esses das folhas em destaque.

Figura 20: La bella principessa e Desenho de Isabella d'Este



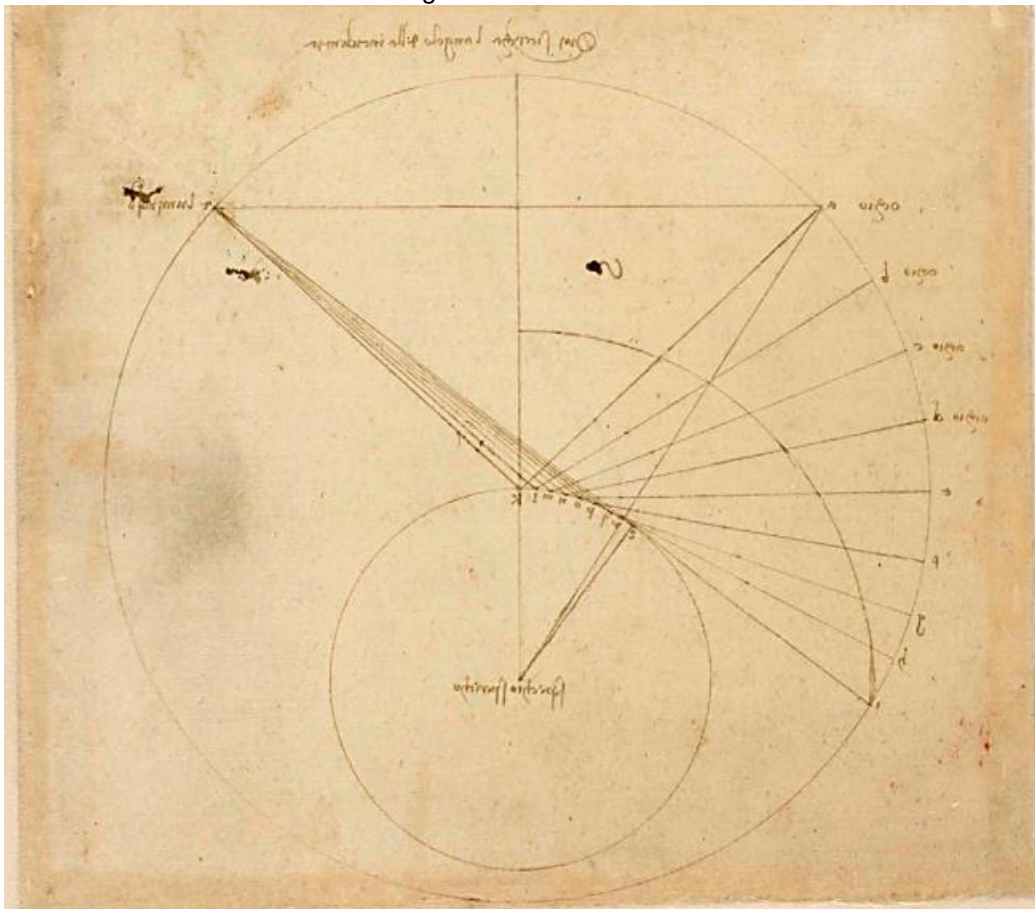
Fonte: Isaacson (2017, p. 275-332).

Na categoria Estudos científicos, estão as folhas nas quais Leonardo da Vinci registrou seus estudos sobre óptica, anatomia, ciência dos pesos, calor, pressão da água, cálculo de atrito, resistência de materiais, movimento perpétuo, movimento motor, movimento natural, gravidade, esforço de uma corda (tração), atração do ímã, teoria das sombras, roldanas, dentre outros temas que estão em folhas do Códice Atlântico como a folha 233r, que está no volume 4 (figura 21). A folha tem como tema o problema de Alhazen, um problema de óptica formulado originalmente por Ptolomeu (Século II) e que teve uma solução proposta pelo estudioso (matemático, físico e astrônomo) árabe Alhazen no século XI.

De forma sucinta, o problema consiste em determinar “o ângulo formado por um raio que incide sobre a superfície de um espelho convexo”, representado no

desenho pela circunferência interna que reflete os raios luminosos, emitidos por uma fonte, sob diferentes ângulos. Como já mencionamos anteriormente, manuscritos gregos e árabes adentraram na Itália na época do Renascimento e, em algum momento, Da Vinci teve contato com esse problema e passou a estudá-lo, valendo-se das ferramentas que lhe eram mais familiares e convenientes: a geometria e o desenho. Além da folha em estudo, registros do referido problema podem ser encontrados nas folhas 59, 79, 394, 443, 495 e 510 do Códice em estudo (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008d, p. 205).

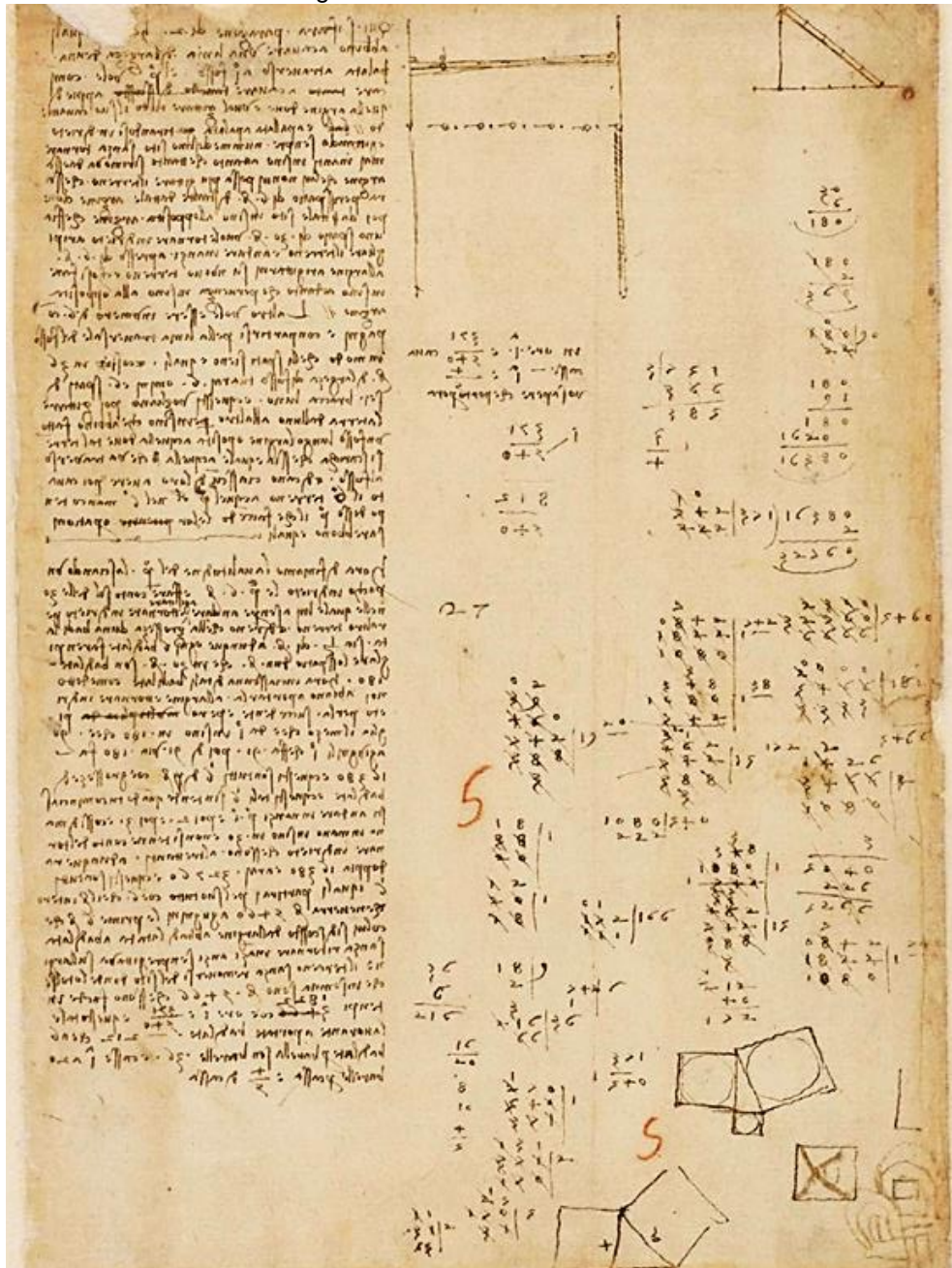
Figura 21: Folha 233



Fonte: Sánchez e Almarza (2008d, p. 59).

Na categoria Aritmética, foram incluídas as folhas do Códice Atlântico nas quais Da Vinci registrou alguns cálculos aritméticos referentes a notas de compras de materiais para pintura, compras utensílios de uso pessoal, registro de salários recebidos, orçamentos para realização de espetáculos teatrais e para realização de obras, como escavações de canais, estudos sobre a aritmética etc. Como exemplo da categoria, temos a folha 567r (figura 22), contém registros sobre um projeto de escavação de um canal (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008j, p. 205).

Figura 22: Folha 567r. Aritmética



Fonte: Sánchez e Almarza (2008j, p. 63).

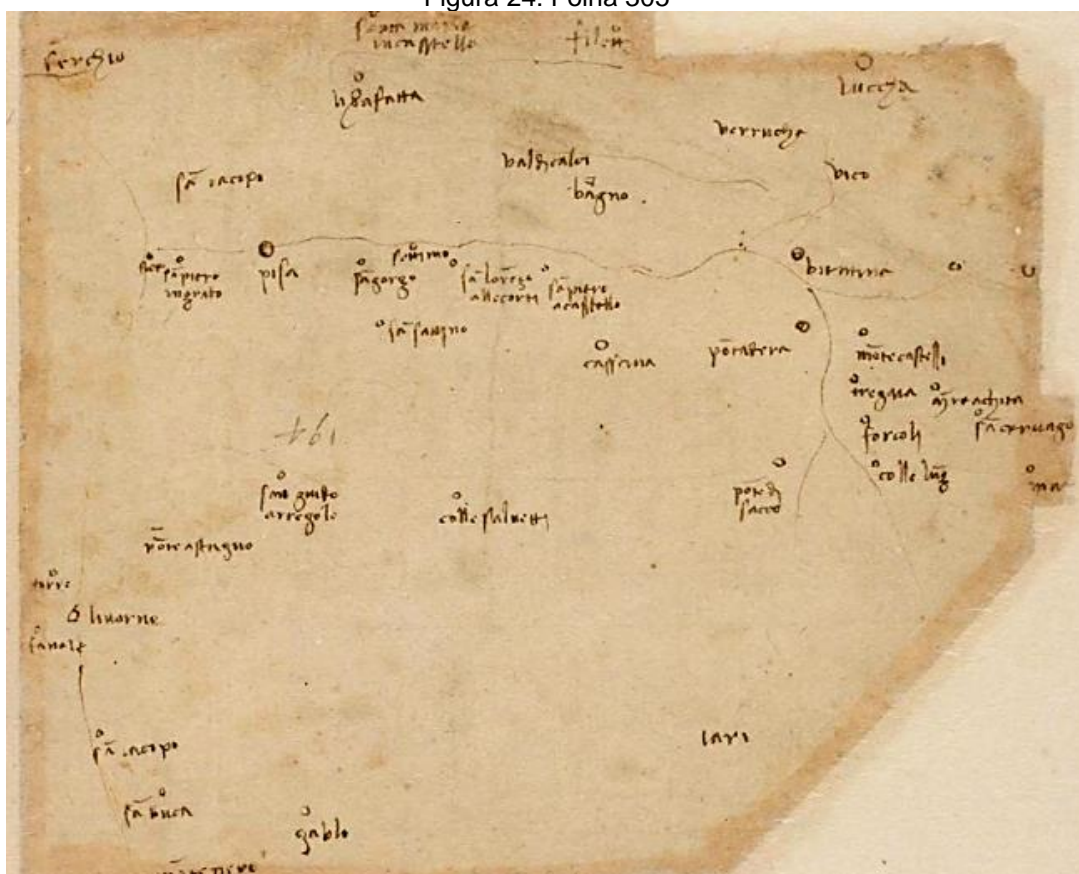
Na categoria Geometria, estão as folhas nas quais Leonardo da Vinci registrou estudos sobre geometria feitos ao longo de sua vida. Como já foi enfatizado anteriormente, ele estava interessado nas analogias que a geometria poderia oferecer para a sua atividade artística e tomava esse ramo da lógica e da matemática como um dos principais fundamentos para a arte que praticava, particularmente a pintura. As folhas contêm desenhos e anotações sobre temas como inscrição de polígonos na circunferência, medição de área de figuras geométricas planas e quadratura do círculo, como a 455r, que está no volume 8 da coleção estudada (figura 23).



A folha 455⁹ contém desenhos de semicírculos e círculos dispostos em 9 filas horizontais que totalizam, aproximadamente, 180. Tratam da transformação de superfícies curvilíneas em retilíneas. O método consiste na inscrição, no semicírculo, de retângulo ou triângulo com superfície equivalente à metade da superfície do quadrado inscrito ou a inserção de um semicírculo menor que divide o maior em duas superfícies equivalentes. Identifica-se que em cada desenho há uma porção escura e outra clara com superfícies equivalentes. E essa diferença de tonalidade origina uma série de desenhos que remetem a um ornamento, daí esse tipo de desenho ser chamado por Da Vinci de ludo geométrico ou jogo geométrico, pelo caráter lúdico, ornamental e remeter a um jogo (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008h, p. 176-177).

A categoria *Outros*, não menos importante que as anteriores, reúne folhas que não puderam ser incluídas nas demais categorias. Essa categoria é formada por folhas nas quais Da Vinci fez anotações sobre o movimento dos dedos das mãos, e apontamentos geográficos como os da folha 305 da figura 24.

Figura 24: Folha 305



Fonte: Sánchez e Almarza (2008e, p. 95).

⁹ Ampliamos a figura 23 para que seus detalhes ficassem mais visíveis e evidenciassem a linguagem geométrica singular da folha. Fonte: (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008h, p. 57).

Ainda na categoria *Outros*, incluímos folhas que tratam de coisas que Da Vinci deveria estudar, nome de pessoas e livros a serem considerados nos seus estudos com o *De insidentibus in húmido*, de Arquimedes, registro de uma lista de livros que eram de sua propriedade, estudos gramaticais e, ainda, a única folha sobre álgebra (que encontramos nos 10 volumes estudados) que contém um texto cuja tradução é uma equação algébrica. Como exemplo da categoria, destacamos a folha 305 (figura 24) que está no volume 5 e contém apontamentos sobre o vale do rio Arno em formato de um mapa com a localização e os nomes das localidades ao longo do rio.

A partir dessa categorização inicial, foi possível ter uma visão geral do conteúdo dos 10 volumes estudados e decidir com mais propriedade que categoria tomar para dela selecionar as folhas a serem analisadas. Diante desses fatos, decidimos pela escolha da categoria 6, *Geometria*. Parece um pouco lógica a escolha da categoria, já que nosso foco é a geometria refletida nas folhas do Códice Atlântico. No entanto, é preciso justificá-la, uma vez que folhas de outras categorias também refletem aspectos da geometria, pois Da Vinci, de alguma forma, aplicou a geometria nesses estudos (como os estudos sobre óptica retratados na figura 21). Além disso, como se trata de estudos sobre geometria, a categoria *Geometria* é a que mais contém folhas cuja geometria refletida pode ser relacionada à geometria escolar.

Feita a escolha da categoria *Geometria*, passamos a estudar as suas 176 folhas, para caracterizá-las e aprofundar nossa visão sobre o seu conteúdo. Esse estudo nos levou a desmembrar essa categoria em 4 temas, de acordo com a geometria refletida nas folhas: *Duplicação do cubo e os modos como Da Vinci a problematizou*; *Geometria espacial e projetiva identificada*; *Geometria plana e seus fundamentos refletidos*; e *As artes da quadratura do círculo imaginadas e estabelecidas*, cujos quantitativos estão no quadro 3.

Quadro 3: Temas da categoria geometria

Temas	Total de folhas
Duplicação do cubo e os modos como Da Vinci a problematizou	8
Geometria espacial e projetiva identificada	18
Geometria plana e seus fundamentos refletidos	26
As artes da quadratura do círculo imaginadas e estabelecidas	124
	176

Fonte: Elaboração dos autores.

Dentre os quatro temas, dois foram novamente divididos em subtemas, na intenção de se fazer uma caracterização mais precisa com vistas ao estabelecimento de relações da geometria refletida nas folhas com os objetos da geometria escolar. A subdivisão originou seis subtemas distribuídos e organizados nos quadros 4, 5, 6 e 7 a seguir.

O quadro 4 contém as 8 folhas que tratam da *Duplicação do cubo e os modos como Da Vinci a problematizou*. Esse problema teria se originado na Antiguidade grega, assim como o da quadratura do círculo. Podemos apontar que talvez o problema tenha sido menos estudado por Leonardo da Vinci que o da quadratura, se levarmos em conta a quantidade de folhas dedicadas a cada problema. Todavia, para esse problema, Leonardo da Vinci demonstra ter encontrado uma solução, conforme vamos discutir quando estudarmos os desenhos referentes à duplicação do cubo.

Quadro 4: Duplicação do cubo

Tema	Folhas	Total
Duplicação do cubo e os modos como Da Vinci a problematizou	65, 72, 161, 231, 242, 395 428 e 588.	8

Fonte: Elaboração dos autores.

O tema *Geometria espacial e projetiva identificada* (quadro 5) totalizou 18 folhas que tratam do estudo dos *sólidos geométricos* (prismas e corpos redondos e decomposição da pirâmide) e algumas transformações entre eles, além da *perspectiva* geométrica. Alguns desses estudos foram feitos com base na geometria de *Os elementos* de Euclides e se constituem por demonstrações ou tentativas de demonstrações que tiveram como fundamento o conteúdo de *Os elementos*.

Quadro 5: Geometria espacial e projetiva

Tema	Folhas	Total
Sólidos geométricos e suas relações	100, 228, 334, 352, 396, 518, 283, 313, 467, 551, 529 e 575.	12
Perspectiva	9, 99, 119, 365, 533 e 602.	6
		18

Fonte: Elaboração dos autores.

O que nos chama a atenção é que Leonardo da Vinci era ativamente inventivo, uma vez que não demonstrava se contentar em somente estudar e copiar *Os elementos*, pois tentava compreender o conteúdo da obra demonstrando as

proposições à sua maneira. A relação entre o volume da pirâmide e do prisma, por exemplo, que está posta na razão de um terço, ele expandia para relacionar pirâmides de alturas diferentes com base retangular e que tivessem mesmo volume. Tratava-se, portanto, de uma demonstração argumentada com base em exemplos. Assim, Leonardo da Vinci sempre buscava ampliar a sua compreensão sobre o que estudava, visando criar métodos inovadores de fazer coisas que já haviam sido feitas, como as demonstrações em *Os elementos* de Euclides, a partir de suas práticas profissionais. O caráter inovador dos estudos de Da Vinci que analisamos caracteriza a linguagem geométrica já mencionada.

O quadro 6 apresenta as 26 folhas sobre *Geometria plana e seus fundamentos refletidos*. Contempla folhas sobre a geometria dos triângulos, quadriláteros ou com desenhos aleatórios de polígonos, além de folhas com estudos sobre a transformação de um polígono, como um retângulo ou triângulo, em quadrado. Essa transformação remonta à geometria da Antiguidade grega e é conhecida como quadratura, entendida como transformação de um polígono em quadrado, ou seja, compor uma superfície quadrada a partir de uma superfície poligonal qualquer.

Quadro 6: Geometria plana e fundamentos

Tema	Folhas	Total
Geometria plana e seus fundamentos refletidos	36, 42, 43, 81, 206, 295, 300, 339, 361, 400, 446, 593, 544, 600, 462, 474, 483, 502, 506, 552, 553, 503, 516, 437, 497 e 562.	26

Fonte: Elaboração dos autores.

O quadro 7, com 124 folhas, reforça a informação anterior de que Leonardo da Vinci teria passado 10 anos tentando solucionar o problema da quadratura do círculo. Essa categoria foi subdividida em dois subtemas, no qual *Lúnulas* (com 14 folhas) engloba desenhos em que Leonardo da Vinci construía e tentava quadrar lúnulas, que foi um dos primeiros métodos para se obter uma superfície poligonal com área equivalente à de uma superfície com fronteiras curvas. Esse método remete à Antiguidade grega e teria sido estudado por Hipócrates de Chios (460 a.C. – 370 a. C.), por isso, a maioria das lúnulas são conhecidas como *lúnulas de Hipócrates* (OZANAM, 1814).

Proporcionalidade entre porções do círculo reúne 110 folhas nas quais Leonardo da Vinci divide o círculo em porções e estabelece uma relação de

proporcionalidade entre as partes (porções) e o todo (círculo), ou entre uma porção e outra porção. Essa divisão objetiva a quadratura, pois dividir o círculo em porções menores poderia facilitar a sua quadratura. Essa subdivisão, que por vezes tendia ao infinito, originava desenhos que estão na fronteira entre a geometria e a arte de Leonardo da Vinci, ou seja, ocorriam quando as tentativas de demonstração da quadratura do círculo ultrapassavam a fronteira do rigor geométrico para o lúdico, o ornamental, a arte. Por isso, esses desenhos geralmente são chamados de desenhos lúdico-geométricos, ou são incluídos em um grupo chamado de ludo geométrico (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Quadro 7: Quadratura do círculo

Tema	Folhas	Total
Lúnulas	237, 247, 259, 325, 368, 389, 394, 424, 429, 442, 443, 445, 486 e 487.	14
Proporcionalidade entre porções do círculo	44, 122, 124, 204, 208, 212, 213, 221, 223, 224, 225, 227, 230, 236, 241, 244, 245, 246, 248, 251, 252, 253, 258, 260, 261, 262, 264, 266, 268, 270, 271, 272, 281, 284, 285, 293, 294, 296, 297, 298, 307, 308, 312, 315, 316, 326, 329, 335, 341, 343, 344, 353, 354, 356, 358, 364, 373, 381, 385, 409, 411, 419, 422, 423, 425, 432, 439, 440, 441, 447, 448, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 458, 459, 460, 463, 464, 466, 469, 471, 475, 476, 482, 485, 488, 489, 495, 496, 498, 501, 504, 505, 522, 523, 526, 528, 530, 537, 538, 540, 584, 590, 594, 596 e 598.	110
		124

Fonte: Elaboração dos autores.

Quando Leonardo da Vinci repetia muitas vezes esse procedimento de formas diferentes, mas em sequência, chegava-se ao jogo geométrico. Era uma demonstração matemática em que as equações eram substituídas por figuras geométricas encadeadas em uma sequência lógica. Por vezes, essa sequência se estendia e formava padronagens geométricas, se assemelhando a ornamentos geométricos que pareciam ter sido obtidos por meio de uma brincadeira com figuras geométricas, ou seja, a fronteira do rigor havia sido ultrapassada e já se estava no campo da ludicidade.

As tentativas de encontrar a solução para o problema da quadratura do círculo eram quase uma obsessão, pois “ano após ano, incansavelmente, ele buscou maneiras de produzir formas circulares com áreas equivalentes a triângulos e retângulos, como se estivesse viciado” (ISAACSON, 2017. p. 234). Como sempre, ele

anotava tudo, inclusive observações sobre os avanços obtidos com os estudos e, em uma delas, chegou a registrar, em um de seus cadernos, que teria encontrado a solução para o problema da quadratura do círculo na 22ª hora de um domingo do ano de 1509. Depois percebeu que não encontrara e retornou aos estudos. Segundo Isaacson (2017), Leonardo da Vinci pretendia publicar um tratado com esses estudos para o qual deu o título de *De Ludo Geométrico* (sobre o jogo da geometria). Um exemplo do caráter lúdico dos desenhos de Da Vinci está na folha 455, que já mencionamos anteriormente na figura 24.

O modo como a categorização foi organizada no texto pode sugerir que as categorias foram estabelecidas previamente ou que elas surgiram no mesmo momento. No entanto, as categorias surgiram a partir do estudo empírico do Códice Atlântico. À medida que avançamos no estudo de cada um dos 10 volumes, as categorias, temas e subtemas emergiram. Esse processo implicava no retorno aos volumes já estudados para identificar as folhas pertencentes à nova categoria, o que se constituiu em um constante ir e vir por entre os milhares de desenhos e anotações de Leonardo da Vinci contidos no Códice Atlântico.

Portanto, reafirmamos que a categoria Geometria se desdobrou em seis subtemas, nos quais as 176 folhas foram organizadas. Talvez esses subtemas não sejam suficientes para explicitar tudo sobre o conteúdo de geometria dos 10 volumes do Códice Atlântico estudado, mas se constituem em uma mostra dos principais assuntos tratados por Leonardo da Vinci em seus estudos sobre geometria. Esses subtemas foram definidos com dois objetivos principais: 1) relacionar a geometria contida nesses temas à geometria escolar; e 2) justificar a escolha das folhas para análise. No que se refere ao objetivo 1, as relações serão melhor evidenciadas na análise semiótica das folhas. No entanto, poderemos enunciar determinadas relações estabelecidas entre alguns dos subtemas e suas relações com os conteúdos da geometria escolar abordada na Educação Básica.

O subtema *Proporcionalidade entre porções do círculo*, por exemplo, pode ser relacionado ao estudo de: circunferência e círculo (área do círculo, comprimento da circunferência, raio, diâmetro, corda, arco, setor, centro e divisão da circunferência); Inscrição de polígonos no círculo (quadrado, pentágono e hexágono, principalmente); área, perímetro e elementos do quadrado, pentágono e hexágono, dentre outros temas que fazem parte do currículo de matemática da Educação Básica. O estudo da

circunferência e do círculo, por exemplo, faz parte do currículo do 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, e é retomado no 2º e 3º ano do Ensino Médio (BRASIL, 2017).

Duplicação do cubo envolve o estudo do cubo e seus elementos (área da face, área lateral, volume, aresta, vértices, diagonais) e estudos sobre triângulo, retângulo e proporções, mobilizados na determinação do cubo de volume duplo. As folhas do subtema *Sólidos geométricos e suas relações* contêm registros que se relacionam ao estudo de cilindro, cone, pirâmides, prismas e esfera, além estabelecer relações entre esses sólidos como, por exemplo, entre o volume do cilindro e do cone e entre o volume da pirâmide e de prismas. Os estudos sobre sólidos geométricos iniciam no Ensino fundamental pela diferenciação entre uma figura plana e um sólido e pela planificação dos sólidos geométricos. No Ensino Médio, esse estudo é mais intenso, principalmente no 2º ano, em que está previsto o estudo de geometria espacial, que inclui o estudo dos sólidos geométricos já mencionados e as relações entre eles (BRASIL, 2007, 2017).

Além dos subtemas mencionados, há nas folhas registros sobre outros temas que se relacionam com a geometria escolar, como teorema de Pitágoras, triângulo retângulo, polígonos regulares, dentre outros que foram utilizados por Leonardo da Vinci em seus estudos sobre geometria. Não criamos subtemas sobre esses assuntos, por eles estarem inseridos nos seis subtemas definidos. O Teorema de Pitágoras, por exemplo, aparece nas folhas sobre *quadratura do círculo*, principalmente na quadratura das lúnulas, pois Da Vinci utilizava esse teorema como um dos objetos da geometria que mobilizava nas tentativas de obter a solução para o problema da quadratura. Ele mobilizava a geometria que conhecia para estudar geometria e obter as analogias que precisava para sua arte.

No que se refere ao objetivo 2 (justificar a escolha das folhas para análise), a criação dos subtemas possibilitou ter uma visão mais completa e profunda da linguagem geométrica do Códice Atlântico, uma vez que os seis subtemas caracterizam os principais assuntos de geometria abordados por Da Vinci. A partir dessa visão, foi possível estabelecer critérios para a seleção das folhas analisadas. Os critérios foram necessários, para que se pudesse chegar a um grupo representativo de folhas, principalmente no aspecto qualitativo. Os critérios sofreram aprimoramentos e refinamentos, na medida em que avançamos no estudo do códice, até que chegássemos ao seguinte formato:

1. *Semelhanças com a geometria escolar*: foram selecionadas folhas que remetem a temas da geometria abordada na Educação Básica, ou seja, que se conectam a assuntos de geometria, previstos nos documentos curriculares oficiais, livros didáticos e efetivamente ensinados nas escolas desse nível de ensino. De forma prática, selecionamos folhas cujos desenhos e anotações remetem a temas de geometria, como triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, cálculo de perímetro, área e volume, sólidos geométricos, círculo, circunferência etc.

2. *Qualidade visual*: no material estudado, há folhas cuja aparência dificultam a compreensão. São folhas com desenhos e anotações sobrepostos, pouco nítidos, que versam sobre temas variados, pequenos ou difíceis de decifrar. Assim, neste trabalho, a qualidade visual se refere à possibilidade de melhor compreensão do conteúdo da folha a partir da sua visualização inicial (sem análise). Por isso, selecionamos: folhas com desenhos de maior tamanho, para facilitar a visualização pelos leitores deste texto; desenhos que abordassem tema único ou temas relacionados; e desenhos nítidos, tendo em vista que, como se trata de um manuscrito do século XV, é natural que a ação do tempo tenha tornado difícil a identificação de alguns desenhos.

3. *Escolha de, pelo menos, uma folha de cada subtema*: entendemos que, se os seis subtemas cobrem os principais assuntos de geometria refletidos nos 10 volumes do Códice Atlântico que estudamos, analisar pelo menos uma folha de cada subtema significa contemplar uma parte significativa da geometria do Códice. Da mesma forma, essa escolha por subtemas, reduz as repetições e torna a análise mais rica do ponto de vista da variedade de temas analisados.

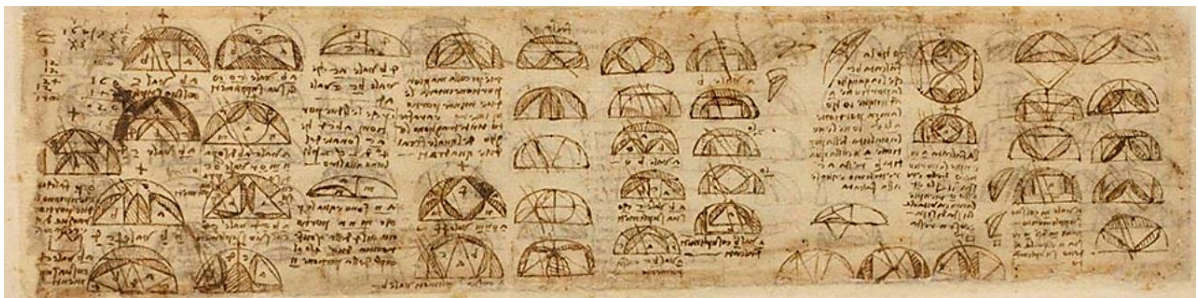
Em síntese, temos que os 10 volumes estudados contêm 602 folhas que foram organizadas em sete categorias: Engenharia, 141 folhas; Arquitetura, 56 folhas; Artes, 27 folhas; Estudos científicos, 148 folhas; Aritmética, 26 folhas; Geometria, 176 folhas; e Outros, com 28 folhas. A categoria Geometria, tomada para o estudo, teve suas 176 folhas organizadas em quatro temas: duplicação do cubo e os modos como Da Vinci a problematizou, 8 folhas; Geometria espacial e projetiva identificada, 18 folhas; Geometria plana e seus fundamentos refletidos, 26 folhas; e Das artes da quadratura do círculo imaginadas e estabelecidas, 124 folhas. Desses quatro temas, dois foram subdivididos, originando seis subtemas.

As folhas de cada subtema foram submetidas aos critérios já descritos para que se definissem quais folhas seriam analisadas no trabalho, o que resultou na escolha de 13 folhas cuja análise está na parte II deste texto. O número tomado para análise

parece ser insignificante do ponto de vista quantitativo, considerando as 602 folhas da fonte em estudo; no entanto, do ponto de vista qualitativo, contempla todos os subtemas das 176 folhas da categoria Geometria selecionada. É verdade que essas 13 folhas não dão conta de todo o conteúdo da geometria abordada na Educação Básica, porém, sua análise é representativa das possíveis relações com essa geometria. Portanto, feita a seleção das folhas, consideramos relevante interrogar: *quais os procedimentos e fundamentos foram tomados para análise das folhas selecionadas?*

Como já mencionamos anteriormente, as folhas do Códice Atlântico da categoria Geometria contêm registros dos estudos de Leonardo da Vinci sobre temas geométricos, como transformações volumétricas, transformações de figuras planas, estudos sobre perspectiva etc. Esses registros foram feitos por ele, no papel, por meio de desenhos e anotações. As anotações são, geralmente, explicações sobre os desenhos, ou seja, desenhos e anotações se complementam na comunicação da mensagem que Da Vinci queria transmitir¹⁰ e que pode se efetivar quando alguém tiver contato com o conteúdo das folhas. Assim, os registros sobre geometria, nas folhas do Códice Atlântico, contêm elementos tanto da linguagem visual (desenhos), quanto da linguagem escrita (a palavra), que se complementam para compor uma linguagem geométrica singular exemplificada pelos desenhos e anotações da folha 253r retratada na figura 25.

Figura 25: Folha 253r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008d, p. 105).

Em virtude dessa evidência relacional que envolve as expressões conceituais da geometria por meio das linguagens visual/gráfica e escrita, direcionamos o estudo

¹⁰ Leonardo da Vinci tinha a intenção de publicar seus estudos, pois isso foi manifestado e registrado por ele em suas anotações. Um dos tratados que pretendia publicar era sobre as transformações volumétricas e o plano Intitulado *Transformações* segundo Isaacson (2017).

sobre essa linguagem geométrica singular com base em uma análise semiótica fundamentada nos trabalhos de Santaella (2012, 2005, 2018), que se apoiam na semiótica proposta por Charles Sanders Peirce (1839-1914) e nas suas aplicações. Para Santaella (2018, p. 60), em uma acepção geral, “a semiótica é a teoria de todos os tipos de signos, códigos, sinais e linguagens”, pois toma como objeto de estudo a linguagem em todas as suas formas. Ela se interessa em desvelar a sua organização interna e explicitar como seus *signos* se articulam para produzir representações na mente interpretadora, no pensamento do observador que tem contato com uma determinada linguagem. Assim, a opção pela semiótica se justifica por ela ser uma teoria que “nos habilita a compreender o potencial comunicativo de todos os tipos de mensagens nos variados efeitos que estão aptas a produzir no receptor” (SANTAELLA, 2018, p. 60). Mas o que é signo?

Em uma definição mais detalhada, o signo é qualquer coisa de qualquer espécie (uma palavra, um livro, uma biblioteca, um grito, uma pintura, um museu, uma pessoa, uma mancha de tinta, um vídeo etc.) que representa uma outra coisa, chamada de objeto do signo, e que produz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial, efeito este que é chamado de interpretante do signo (SANTAELLA, 2018, p. 8).

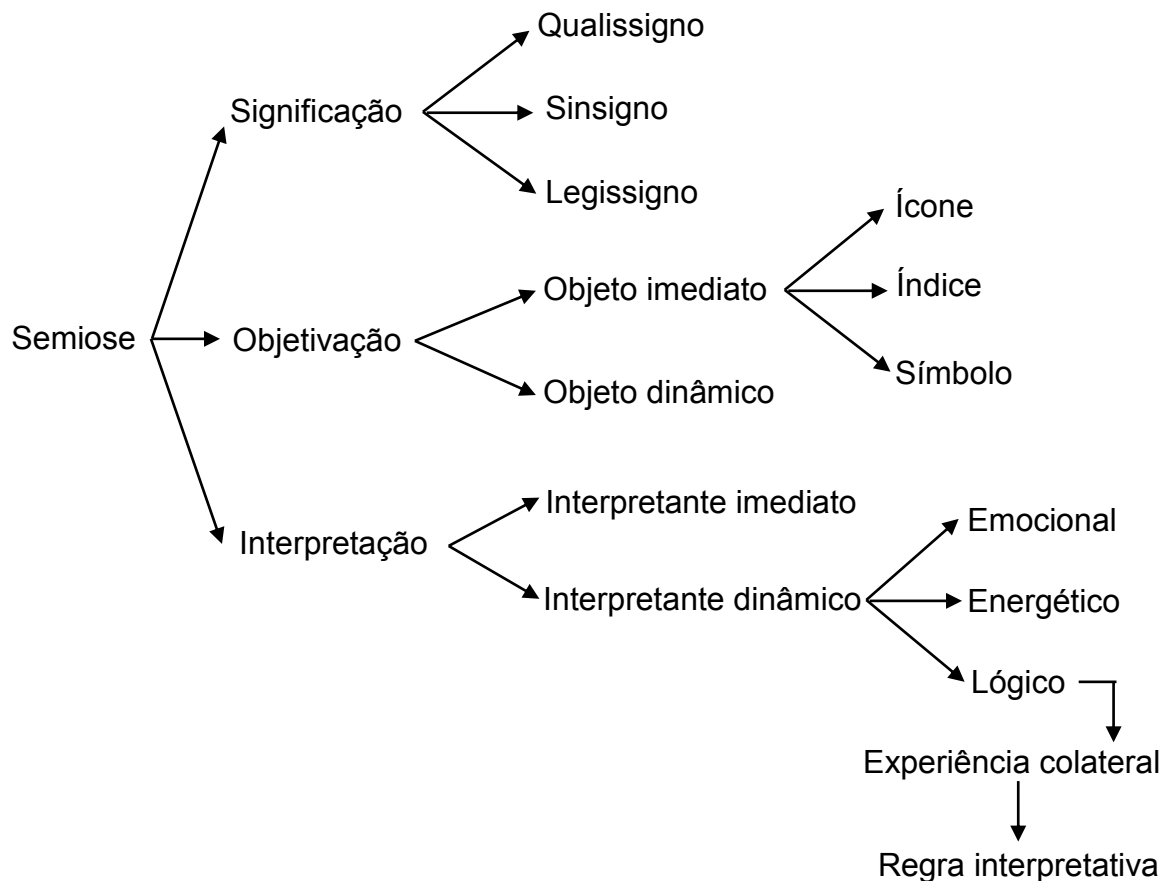
Neste trabalho, especificamente, os signos são os elementos que compõem a linguagem geométrica contida nas folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci como, por exemplo, o desenho de um triângulo: esse desenho é um *signo* que se refere a um triângulo, que é o seu *objeto*; quem o vir estará sob o efeito desse desenho, ou seja, o efeito causado na mente interpretadora, e esse efeito (que pode ser uma lembrança, uma emoção ou uma ação) é o *interpretante* do signo. *Signo*, *objeto* e *interpretante* são os conceitos-base do processo de significação, também chamado de *semiose*, que se materializa pela análise semiótica, de um sistema de signos existente como a linguagem geométrica do Códice Atlântico. Essa análise se processa em três etapas: *a significação*, *a objetivação* e *a interpretação*.

A *significação* foca a relação do signo consigo mesmo, o seu fundamento, a partir do qual o signo pode ser um *qualissigno*, um *sinsigno* e um *legissigno*; a *objetivação* foca a relação do signo com o objeto que ele representa (*objeto dinâmico*) e o modo como ele o representa (*objeto imediato*) e o caracteriza como *ícone*, *índice* e *símbolo*; e a *interpretação* foca a relação do signo com o interpretante, ou seja, os efeitos interpretativos em potencial (*o interpretante imediato*) ou os efeitos provocados

de fato em uma mente real (*o interpretante dinâmico*) que podem ser *emocionais, energéticos ou lógicos* (SANTAELLA, 2005, 2018).

Assim, o processo de atribuição de significação para a linguagem geométrica das folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci (a semiose) se fundamentou nos conceitos mencionados e na sua organização metodológica, uma vez que a própria apresentação dos conceitos já contém em si uma sequência lógica que orienta a análise. Esse grupo de conceitos e sua organização formam uma rede teórica, conforme tratada por Barros (2016), ao discorrer sobre a interligação e conexão existentes entre os conceitos, retratada na figura 26.

Figura 26: Rede conceitual semiótica



Fonte: Elaborado a partir de Santaella (2012, 2005, 2018).

Iniciemos pela significação. Como já sabemos, o signo é qualquer coisa. Porém, para Santaella (2018, p. 12), existem três propriedades formais que capacitam uma coisa a funcionar como signo: “sua qualidade, sua existência (o simples fato de existir) e seu caráter de lei”. Essas propriedades internas são comuns a qualquer coisa

e habilitam tal coisa a agir como signo, pois fazem com que ela *sugira, indique ou represente* algo que está fora dela, o objeto. Quando o aspecto qualitativo é considerado como signo, temos um *qualissigno*, quando se considera o aspecto existencial, temos um *sinsigno* (sin de singular) e quando se considera seu aspecto de lei, temos um *legissigno*.

Quando consideramos o aspecto qualitativo de uma coisa, essa qualidade pode ser um signo, pois pode ser associada a outra coisa que contenha ou que seja dotada da mesma qualidade. A cor verde, por exemplo, pode sugerir a floresta. Essa qualidade de cor não é a floresta, mas sugere, lembra, de alguma forma, a floresta, isso porque a floresta, mas particularmente as folhas das árvores, lhe conferem a mesma qualidade de cor do verde que a lembra, ou seja, o que associa o verde à floresta é a qualidade de cor verde que lhes é comum. “Esse poder de sugestão que a mera qualidade apresenta, lhe dá capacidade para funcionar como signo” (SANTAELLA, 2018, p. 12).

Qualquer coisa que existe é um signo. Para Santaella (2018, p. 13), “existir significa ocupar um lugar no tempo e espaço, significa reagir em relação a outros existentes” presentes em um contexto. O existente é algo singular, ele está inserido em um contexto, ele é parte de um universo, por isso, ele “aponta para esse universo do qual faz parte” (SANTAELLA, 2018, p. 146). Dizer que ele aponta, significa dizer que ele se conecta a uma série de outras partes, outros existentes, que compõem o referido contexto. A ocorrência dessa conexão entre um existente e outra coisa (outro existente) caracteriza a ação dele como signo dessa outra coisa, o habilita a *indicar* outro existente que está fora dele, e esse é o papel dos signos.

Por sua vez, uma lei é uma regra que se impõe sobre algo ou alguém que está sob seu domínio. Ela abrange várias coisas existentes, singulares. A lei é genérica e as coisas sob sua abrangência devem se conformar a ela, devem agir segundo o que a lei prescreve, devem *representar* aquilo que a lei determina que ela represente. Uma coisa que carrega consigo o caráter de lei é um legisigno e a coisa existente “que se conforma a à generalidade da lei é chamado de réplica” (SANTAELLA, 2018, p. 143).

As três propriedades não se excluem de modo que, ao se apresentar para uma mente interpretadora, um signo qualquer será sempre *uma qualidade, um existente e uma lei*, pois cada réplica da lei é um singular, um existente que, por sua vez, é composto por qualidades. O que ocorre é que, a depender de como os signos se organizam em um sistema, ou de como o signo é visto pelo observador, pode haver o

predomínio de uma das propriedades em relação às outras, mas as propriedades são onipresentes, ou seja, no que se refere à significação o signo é sempre um *qualissigno*, um *sinsigno* e um *legissigno* (SANTAELLA, 2018).

No que se refere à relação do signo com o objeto, a *objetivação*, há que se considerar a existência de dois objetos: o *objeto dinâmico*, que é aquele que o signo representa, e o *objeto imediato*, que é o modo como o signo representa o objeto dinâmico. O objeto dinâmico é externo ao signo, ele é aquilo ao que o signo se refere. O objeto imediato é interno ao signo e consiste no modo singular como o signo se refere ao seu objeto dinâmico. O objeto dinâmico está, de alguma maneira, ligado ao signo que o representa, ou seja, no interior do signo há algum elemento que faz a conexão entre o signo e o objeto dinâmico. Esse elemento é o objeto imediato (SANTAELLA, 2005, 2018).

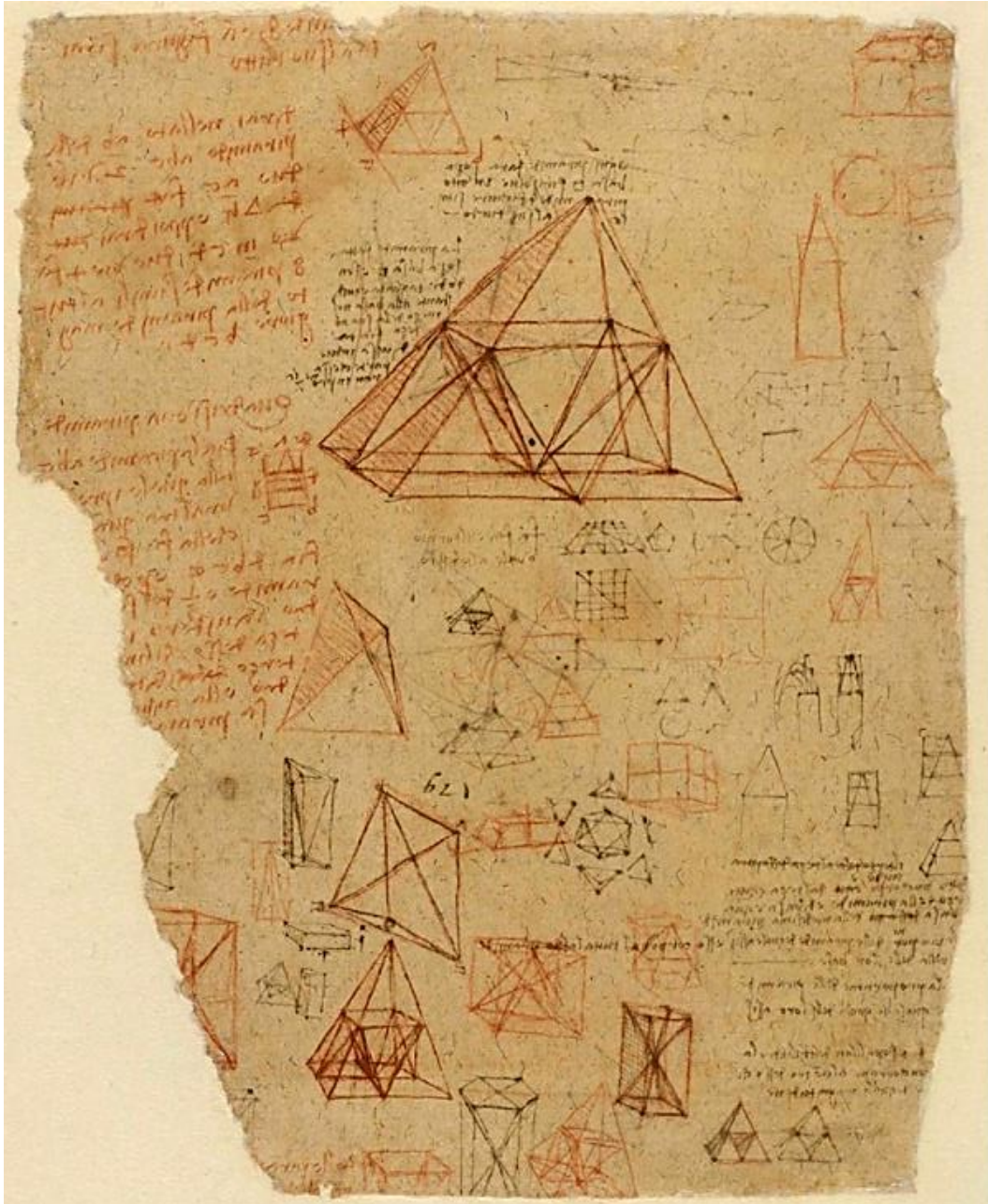
Há três modos de o signo se relacionar com o objeto: ele pode *sugerir*, *indicar* e *representar* esse objeto. Isso depende do fundamento que se destaca no sistema de signos ou do fundamento que está sendo considerado em um estudo: se o fundamento é uma qualidade, a relação do signo com o objeto será *icônica*; se o fundamento é o aspecto existencial, a relação do signo com o objeto será *indicial*; e se o fundamento considerado for uma lei ou convenção, a relação do signo com o objeto será *simbólica*. Em síntese: Qualissignos são ícones que sugerem o seu objeto dinâmico; sinsignos são índices que indicam o seu objeto dinâmico; e legissignos são símbolos que representam o seu objeto dinâmico (SANTAELLA, 2018).

Qualissignos Icônicos se referem a seus objetos por semelhança, ou seja, são portadores de uma qualidade que se assemelha a uma qualidade do seu objeto e, dessa forma, só podem *sugerir* seu objeto. Os *Sinsignos indiciais* são existentes que estão inseridos em um contexto, então eles apontam para esse contexto *indicando*, de forma direta, o objeto a que se referem. Já os *legissignos simbólicos representam* seus objetos, pois são “signos genuínos” porque carregam no seu interior o poder de representar. Eles representam aquilo que a lei determina que eles representem. Portanto, o ícone sugere o objeto por meio de semelhança, o índice indica o objeto por meio de uma conexão direta, existencial, e o símbolo representa o objeto por meio de uma lei (SANTAELLA, 2005, 2018, p. 25).

Mas como os conceitos referentes à significação e à objetivação podem refletir uma linguagem geométrica singular do Códice Atlântico? Como qualquer coisa é um signo, por possuir as propriedades necessárias a agir como tal, a linguagem

geométrica das folhas do Códice Atlântico é um signo, ou melhor, um conjunto de signos que representam objetos. Neste trabalho, refletem, especificamente, objetos da geometria. Como exemplo, vejamos a folha 334r (figura 27) que está no volume 6 da coleção estudada e que contém algumas anotações e desenhos.

Figura 27: Folha 334r. Pirâmide subdividida



Fonte: Sánchez e Almarza (2008f, p. 39).

A folha tem contornos irregulares e uma cor próxima do marrom (claro, talvez devido ao tempo). Contém anotações em marrom (mais escuro para contrastar com a folha), na parte superior esquerda, e em preto, próximo ao desenho maior e na parte inferior direita. Os desenhos (mais de 40, pelo menos) têm tonalidade de cor próxima

a cor do texto. Nesses desenhos, é possível identificar pontos, linhas e regiões sombreadas que contrastam com outras mais claras e que destacam e delimitam superfícies poligonais triangulares, retangulares e circulares. Além dessas características, pode-se perceber que entre os desenhos há alguns feitos em perspectiva, ou seja, desenhos tridimensionais que remetem à ideia de volume.

Esses elementos - ponto, linha reta, curva, contorno, superfície, cor, tom, dimensão, dentre outros -, são os elementos visuais primários da linguagem visual (SANTAELLA, 2012) e como já mencionamos, a linguagem visual faz parte da linguagem geométrica das folhas em estudo como a 334r. Tais elementos compõem o aspecto qualitativo dos signos contido na folha 334r, ou seja, caracterizam o qualissigno icônico e, por isso, sugerem algo a que esses signos se referem. Ponto, linha reta, linha curva, superfície e volume são qualidades, elas sugerem que alguns desenhos da folha se referem ao campo da geometria, pois nesse campo de referência há objetos com as mesmas qualidades contidas nos desenhos.

Dentre esses desenhos, destacamos o desenho maior no centro da parte superior que, por sugestão de suas qualidades, remete ao objeto geométrico pirâmide. A pirâmide é um sólido geométrico que existe no contexto (abstrato) da geometria e sempre que for materializada por um desenho no papel, passa a existir materialmente no suporte, o papel. O desenho da pirâmide indica, de forma direta, ao que se refere. Ele “dirige a retina mental” (SANTAELLA, 2018, p. 16) do intérprete para a pirâmide existente no contexto da geometria, ou seja, o desenho, por seu aspecto existencial, indica o objeto geométrico pirâmide, e isso caracteriza o desenho como um sinsigno indicial.

De outro modo, a pirâmide possui algo que está associado a ela, que a caracteriza como tal, e esse algo pode ser chamado de definição¹¹ da pirâmide. Trata-se de uma convenção estabelecida no âmbito da cultura matemática que impõe à pirâmide que ela seja o que é. Essa convenção matemática garante à pirâmide a propriedade da lei, ou seja, o desenho da pirâmide representa o objeto da geometria pirâmide por meio da convenção que diz o que ela é, que a define. Isso caracteriza o legissigno simbólico.

Portanto, o desenho da pirâmide contido na folha 334r é: um qualissigno icônico, por conter as qualidades que sugerem uma pirâmide; um sinsigno indicial, por

¹¹ No sentido de caracterizar e dizer o que é.

ser um existente e indicar, de forma direta, uma pirâmide; e um legissigno simbólico, por representar um objeto portador de uma lei que determina que o desenho represente o que ele de fato representa - o objeto geométrico pirâmide.

As discussões sobre o objeto matemático e suas características são antigas, ou seja, ocorrem desde a época de Platão e Aristóteles (pelo menos). Essas discussões, ocorridas no campo da filosofia e da própria matemática, originaram diferentes correntes filosóficas, como o intuicionismo, o logicismo e o formalismo, cada uma com seu ponto de vista, com convergências e divergências, sobre a natureza do objeto matemático.

A partir dessas filosofias, o que se pode dizer sobre o objeto matemático é que não se trata de um objeto do mundo físico, mas sim do pensamento humano que se organiza por processos de abstração. Logo é abstrato. Porém, o objeto do mundo físico tem importância, principalmente, para a matemática escolar, uma vez que pode levar o estudante ou o professor a pensar melhor sobre o objeto matemático. Então, um estudante, ao tomar um objeto do mundo físico, poderá imaginar o objeto matemático. Nessa linha de raciocínio, o objeto do mundo físico provoca um efeito no estudante que é pensar no objeto matemático, ou seja, ele interpreta o objeto do mundo físico como objeto da matemática. Essa relação entre objeto do mundo físico e objeto do pensamento é, exatamente, o que estamos tratando neste trabalho por meio da semiótica abordada por Santaella (2005, 2018).

O que queremos expressar é que, com base na semiótica discutida, o desenho de uma pirâmide (objeto do mundo físico) é um signo, e como tal, ele se refere a algo que está fora dele (seu objeto dinâmico): a pirâmide (objeto da matemática). Ao ver o desenho da pirâmide, uma pessoa lembra do objeto matemático pirâmide, mas ela não é o desenho, ela está na mente interpretadora, no pensamento de quem a viu no desenho, pois esse mesmo desenho, visto por outra pessoa, pode causar outra interpretação, ou seja, outra pessoa pode olhar para o desenho de uma pirâmide e dizer que é uma montanha, por exemplo. Portanto, o objeto matemático pirâmide é o efeito causado pelo desenho da pirâmide na mente interpretadora.

Como falamos de efeito, passemos ao terceiro elemento da semiose: a interpretação. O qualissigno icônico, o sinsigno indicial e o legissigno simbólico, são signos que produzem efeitos no intérprete e esse efeito é o *interpretante* do signo. Trata-se do efeito interpretativo que o signo produz em uma mente real ou potencial. O efeito em potencial é o *interpretante imediato*, ele é interno ao signo. Já o efeito que

ocorre de fato, que é causado em uma mente real, é o *interpretante dinâmico*, que é externo ao signo.

Mesmo não estando em contato com uma mente real, o signo possui características internas que podem ser atualizadas no momento de uma interpretação. Ele possui uma interpretabilidade que lhe é inerente e independe do intérprete. É o *interpretante imediato*. As folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, por exemplo, mesmo não sendo vistas por um intérprete, continuam a ter sua carga de significação, pois contêm elementos que lhe são internos e que poderão vir a significar, caso tenham contato com um intérprete. Assim, elas possuem um potencial para significar, uma interpretabilidade, que é o seu interpretante imediato (SANTAELLA, 2005, 2018).

A interpretabilidade mencionada, que se materializa nos possíveis efeitos interpretativos causados pelo signo, só pode ser descrita por quem está sob tal efeito, ou seja, pela mente interpretadora que assume o papel do interpretante dinâmico. Por isso, ao fazer uma análise semiótica de uma determinada linguagem, quem a faz, assume “necessariamente a posição do interpretante dinâmico daquela semiose específica”, uma vez que o resultado da análise materializada na linguagem verbal (no texto) só é possível porque a mente interpretadora está sob os efeitos do signo que se interpreta ou analisa. Assim, tais efeitos são reais e caracterizam o interpretante dinâmico que se subdivide nos níveis: emocional, energético e lógico (SANTAELLA, 2018, p. 122).

Para Santaella (2018, p. 24), o efeito emocional, geralmente provocado pelo qualissigno icônico, é o “primeiro efeito que o signo está apto a provocar no intérprete, uma simples qualidade de sentimento” que pode se traduzir nas primeiras impressões que alguém tem ao se deparar com alguma coisa, o fenômeno. Em nosso estudo, quando um observador se depara com uma das folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, como a 334r do exemplo anterior, suas primeiras impressões podem estar relacionadas a admiração, apreciação estética, confusão, calma, encantamento, nostalgia, simpatia, interesse, dentre outros sentimentos (ou qualidades de sentimentos) que só poderão ser descritos por um possível intérprete. No nosso caso, essa folha causou um sentimento de confusão, inicialmente, mas depois, simpatia e interesse que nos fez buscar os possíveis significados para o seu conteúdo.

No mesmo movimento, Santaella (2018, 2005) assevera que o efeito energético é o segundo efeito do signo, geralmente provocado pelo sinsigno indicial. O índice tem a característica de indicar de forma direta (sem ambiguidades) o objeto a que se refere e isso, direciona a mente interpretadora para tal objeto e esse direcionamento causa, na mente, uma reação que culmina em um gasto de energia físico ou mental. No caso do nosso estudo, o desenho de uma pirâmide (como o da folha 334r. Figura 27) se refere de forma direta ao ente geométrico pirâmide, ou seja, ao ter contato com ele, o intérprete pode reagir mentalmente ou fisicamente para interpretá-lo. Pode, simplesmente, pensar e lembrar de uma pirâmide (gasto de energia mental) ou buscar um livro de geometria que contenha o estudo da pirâmide para melhor compreender o desenho e o que ele indica (gasto de energia físico).

O terceiro efeito causado, geralmente pelo legissigno simbólico, é o efeito lógico, que se relaciona com a cognição. Ocorre quando o signo é interpretado por meio de uma “regra interpretativa” criada na mente do intérprete. A regra interpretativa faz com que haja, na mente interpretadora, uma associação de ideias responsável por estabelecer a conexão entre o signo (símbolo) e aquilo a que ele se refere, que ele representa: o seu objeto. Assim, a interpretação do símbolo está condicionada a tal regra que pode ser entendida como a apreensão das informações sobre o contexto de referência do signo em estudo (SANTAELLA, 2018, p. 25).

Como já mencionamos, a pirâmide da folha 334r provocou em nós efeitos emocionais e energéticos que despertaram o nosso interesse pelo desenho, inicialmente. Isso nos fez buscar informações que nos ajudassem a compreender o desenho, parte nas anotações das próprias páginas e parte em outras fontes. Essa busca de informações e seu estudo fez com que adquiríssemos novos conhecimentos sobre o campo de referência do objeto pirâmide representado pelo desenho na folha em estudo. Esses conhecimentos, aliados a outros que já tínhamos, compuseram a regra interpretativa da pirâmide em estudo.

Desse modo, a interpretação da linguagem geométrica em estudo exigiu que assimilássemos uma regra interpretativa. Essa regra contém elementos (ou conhecimentos) do contexto de referência dos signos dessa linguagem. Esse contexto é composto de um contexto geral e de outro mais específico. Consideramos geral o contexto histórico e o sociocultural, que circundaram a elaboração do conteúdo das folhas analisadas; e o mais específico, o contexto da arte, geometria e o modo de

pensar de Leonardo da Vinci, que se relacionam diretamente com a elaboração e com o conteúdo da linguagem geométrica em estudo.

No que se refere ao contexto geral (histórico e sociocultural), de fato ele impôs algumas convenções/pressões às quais a linguagem geométrica do Códice Atlântico foi submetida, ou seja, essa linguagem foi elaborada no tempo e no espaço em constante relação com o modo de pensar a história, a cultura e a sociedade da época. Por isso, a interpretação dessa linguagem precisou de uma inserção nesse contexto, da apreensão de suas características e do estabelecimento de relações com a referida linguagem.

Tal discussão já foi estabelecida anteriormente e contém aspectos relativos à Idade Média e, principalmente, ao Renascimento italiano no que se refere ao modo de pensar a organização política e social, as atividades de trabalho e produção, como arte e arquitetura, os conflitos armados, a atividade de ensino e a produção e circulação do conhecimento, particularmente o conhecimento matemático e geométrico. Portanto, além de contextualizar o estudo como um todo, o contexto geral foi discutido com a finalidade (talvez inconsciente, a princípio) de compor a regra interpretativa necessária (a nós) para a análise semiótica da linguagem geométrica contida nas folhas do Códice Atlântico.

O contexto da geometria (específico) foi considerado como parte da regra interpretativa, por ser a geometria quem comporta os objetos geométricos aos quais se referem os signos da linguagem geométrica das folhas analisadas. Nesse sentido, a análise semiótica buscou identificar nas folhas do Códice Atlântico os objetos da geometria (como ciência) mobilizados por Da Vinci em seus estudos e os relacionar aos objetos da geometria escolar, por ser o nosso objetivo estabelecer relações entre a geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e os objetos da geometria escolar.

A referência à geometria escolar foi feita quando relacionamos os objetos da linguagem geométrica do Códice Atlântico com os objetos da geometria, para identificar quais desses objetos fazem parte dos que são abordados na geometria da Educação Básica. Para exemplificar, consideremos o desenho da pirâmide contida na folha 334r (figura 27) que, como já foi dito e justificado, é um signo que se refere ao objeto geométrico pirâmide. A partir daí, essa pirâmide poderia ser relacionada aos temas abordados na Educação Básica que se referem à pirâmide, como, por exemplo, definição da pirâmide, tipos de pirâmides (tetraedro regular, pirâmide de base

quadrada...), elementos da pirâmide (vértices, arestas, faces, altura, apótema...), área total da pirâmide, volume e relação entre pirâmides e prismas. Sabemos que esses temas são abordados na geometria da Educação Básica porque consultamos os documentos curriculares e livros didáticos desse nível de ensino.

Por conseguinte, a regra interpretativa precisou considerar, ainda o contexto da arte e o modo de pensar de Da Vinci. A linguagem geométrica em análise certamente é produto da mente de Leonardo da Vinci, fruto do processo de significação (a semiose) ocorrido no seu pensamento a partir de suas experiências como pessoa, artista e estudioso da geometria. Assim, além das pressões dos contextos já mencionados, o processo de produção da linguagem em estudo foi mediado por uma maneira de pensar característica de Leonardo da Vinci, o pensamento por analogia. De acordo com Isaacson (2017), esse modo de pensar pode ser caracterizado por sua busca incessante, sempre mediada pela observação e experimentação, por elementos que pudessem ser mobilizados para a sua atividade artística e fundamentá-la cientificamente.

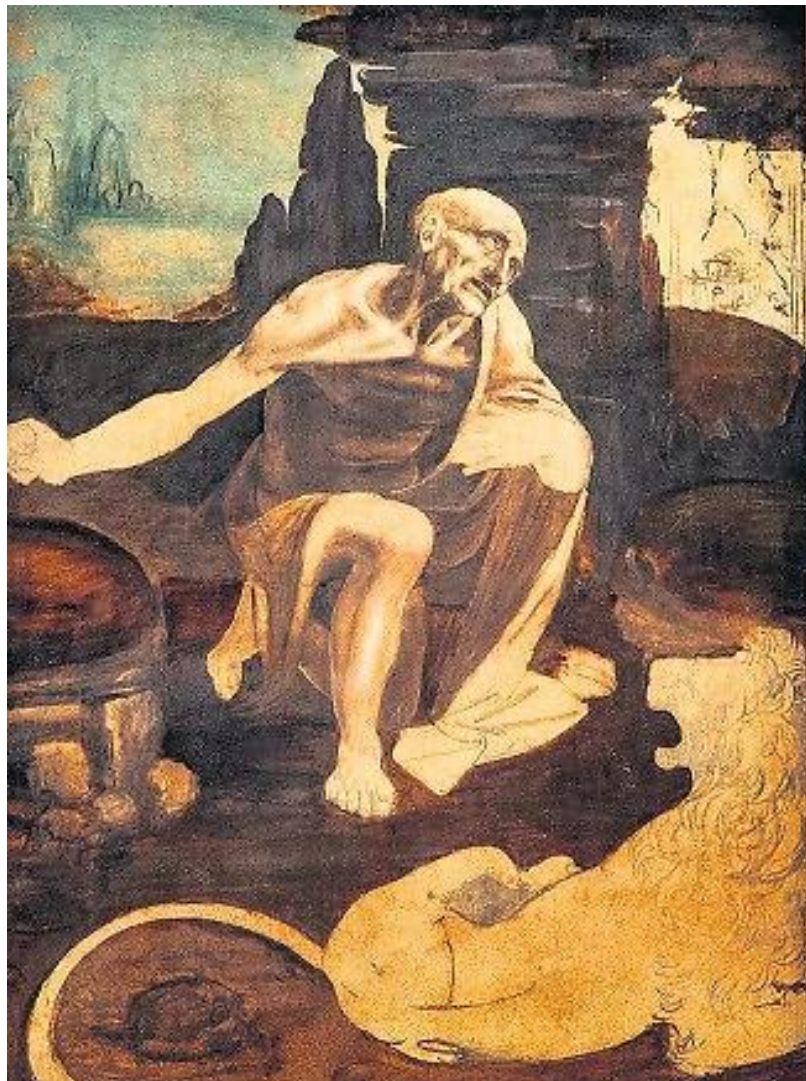
Para exemplificar o pensamento por analogia mencionado, tomemos, a partir de Isaacson (2017) e Sánchez e Almarza (2008), alguns estudos feitos por Leonardo da Vinci em relação com a sua atividade artística. Ele estudou óptica em busca de apreender e melhor representar os efeitos da luz em seus quadros, com isso foi o pioneiro na técnica do *sfumato*; estudou anatomia, para pintar corpos "perfeitos" e representar cada traço como pele, nervos, ossos, veias, olhos e outras partes do corpo; e geometria, para imprimir em suas pinturas a ideia de movimento. Essas pinturas ficaram conhecidas como pinturas psicológicas, pois transmitiam a sensação de sentimentos e movimento. Nossa questão, entretanto, é: como transmitir a ideia de movimento em uma pintura no plano cujos traços são fixos?

Parte da solução para esse problema foi encontrada por Leonardo da Vinci na geometria, pois retratar os músculos em movimento era alterar a sua forma, mas manter seu volume, e isso é o que ocorre nos estudos relativos à conservação do volume dos sólidos estudados pela estereometria, que trata da medição de volume de sólidos geométricos como cilindro, cone, pirâmide, prismas etc.; na geometria escolar, estão inseridos na geometria espacial. Os estudos de Leonardo da Vinci nesse campo específico focam nas transformações volumétricas que ocorrem quando um sólido geométrico é transformado em outro de forma diferente, mas de mesmo volume do sólido inicial, e as transformações entre figuras geométricas planas que, na

Antiguidade grega, eram chamadas de quadraturas.

Leonardo da Vinci se interessava pela estereometria, por ela fornecer analogias para sua arte, principalmente suas pinturas nas quais buscava retratar corpos em movimento. Tais pinturas eram verdadeiras narrativas de cenas e acontecimentos e por isso foram classificadas como pinturas narrativas ou pinturas psicológicas, pois objetivavam transmitir as emoções dos personagens retratados (angústia, felicidade, surpresa, indignação, súplica, temor, paixão etc.). Para tanto, Leonardo da Vinci detalhava os corpos em movimento: braços contorcidos, olhares e sorrisos misteriosos, rostos virados, pessoas ajoelhadas, montadas a cavalo e em combate, além de retratar a paisagem, como névoa, rochedos, flores e plantas. Esse detalhamento pode ser observado em obras como *A última ceia*, *Virgem dos rochedos*, *O batismo de cristo*, *São Jerônimo no deserto* (figura 28) e *Dama com arminho* (figura 29).

Figura 28: São Jerônimo no deserto



Fonte: Isaacson (2017, p. 105).

São Jerônimo no deserto é uma obra inacabada de Leonardo da Vinci que “mostra São Jerônimo, um acadêmico que traduziu a Bíblia para o latim, durante seu retiro como eremita no deserto” (ISAACSON, 2017, p. 104). Ele está ajoelhado com um dos joelhos apoiados no chão “esquálido e debilitado, exalando vergonha” enquanto a outra perna está curvada, sugerindo uma posição de súplica. O detalhamento permite visualizar alguns ossos e nervos do peito e pescoço, sob a pele. Esse detalhamento é fruto dos estudos anatômicos, da óptica do princípio da conservação de volume da geometria que pode ser percebido nas partes do corpo que estão em movimento. Elas mudam de forma, mas mantêm o volume inicial da mesma forma, como se pode observar em *Dama com arminho*, na figura 29.

Figura 29: Dama com arminho



Fonte: Isaacson (2017, p. 297)

A analogia entre os estudos de conservação de volume e a pintura de Leonardo da Vinci se estabeleceu quando ele percebeu que um corpo em movimento se desloca e mantém seu volume inalterado, ou seja, muda somente a forma. Leonardo da Vinci era um observador atento da natureza e mantinha contato permanente com ela, pois foi observando a água em movimento na região da Toscana que ele percebeu que uma quantidade de água em movimento muda de forma, mas mantém seu volume. Analogamente, isso ocorre quando se transforma uma figura geométrica sólida em outra de forma diferente e mesmo volume, ou na transformação de uma figura plana em outra de forma diferente, mas com a mesma área.

Todavia, Leonardo da Vinci tinha um duplo objetivo com os estudos em matemática, pois na época em que começou a se tornar conhecido por sua arte, a pintura não era a mais nobre das artes, era classificada como uma arte mecânica, portanto não tão elevada como a poesia e as narrativas históricas, por exemplo. Como consequência, os pintores não eram tidos como os mais importantes dentre os artistas e teriam que buscar elevar seu status social. Então, Leonardo da Vinci defendia a pintura e buscava fundamentá-la cientificamente, o fazendo por meio da geometria. Para ele, a matemática conferia o status de ciência verdadeira a todo estudo realizado pelo homem (ISAACSON, 2017).

Portanto, Leonardo da Vinci observava a natureza e buscava nela analogias para sua arte e seus estudos. A partir dessa observação, ele relacionava os elementos da natureza com os da Arte. No caso da conservação do volume, ele buscou elementos no movimento da água, fez relação com a conservação de área e volume na geometria e mobilizou esses elementos para suas pinturas, conferindo-lhes uma característica até então desconhecida ou pouco explorada. A nosso ver, a conservação do volume é um dos conceitos que fundamentam a pintura de Leonardo da Vinci, e tal conclusão foi possível a partir dos estudos que fizemos em torno da linguagem geométrica contida nas folhas do seu Códice Atlântico.

Os estudos mencionados foram disparados a partir do momento que tivemos contato com essa linguagem; são produtos dos seus efeitos em nosso pensamento. Eles (os efeitos) nos impulsionaram em direção ao contexto de referência dos signos contidos na linguagem geométrica estudada, contexto no qual se inserem o contexto histórico, sociocultural, artístico, geométrico e o modo de pensar de Da Vinci. Adentrar nesse(s) contexto(s) exigiu um esforço cognitivo, para a apropriação de informações,

que culminou com a formulação da regra interpretativa necessária a uma análise aprofundada da referida linguagem, como um trabalho deste nível exige.

Portanto, entendemos que a regra interpretativa é algo que se adquire pelo intérprete à medida que ele, impulsionado pelo efeito energético, se lança em direção ao objeto a ser interpretado, ou seja, inicia um processo de busca de informações que o leve ao melhor entendimento possível da referencialidade do objeto em estudo.

Para Santaella (2005), é na busca por interpretar que o intérprete passa a ter algumas experiências com o objeto ou com aquilo que está no seu entorno, e esse processo experiencial é a “experiência colateral” dele com o objeto a ser interpretado. Ela é a responsável pela ampliação do repertório do intérprete sobre o objeto, o que caracteriza a aprendizagem, daí o efeito lógico ser atrelado ao aspecto cognitivo na teoria semiótica. Compreendemos, portanto, que tal processamento objeto-intérprete-interpretação-objeto interpretado pode produzir pensamento e linguagem semiótica escolar.

Em síntese, neste trabalho, a linguagem geométrica contida nas folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci é um signo, pois seus elementos contêm as propriedades qualitativas (qualissigno), existenciais (sinsigno) e de lei (legissigno) que os habilita a agir como tal. Ela se refere a algo que lhe é externo (objeto dinâmico), de um modo particular, que lhe é interno (objeto imediato). Ela tem potencial para provocar um efeito interpretativo (interpretante imediato) ou o provocam de fato em uma mente interpretadora para a qual se apresenta (interpretante dinâmico). Esse efeito provocado, de fato, pode ser emocional, energético ou lógico. O efeito Lógico está atrelado à composição da regra interpretativa pelo intérprete, que é resultado das experiências colaterais dele com os elementos do contexto do objeto. Tais experiências podem resultar na ampliação do repertório do intérprete sobre o contexto de referência dos objetos da linguagem em estudo.

Toda essa gama conceitual advinda da semiótica é, na verdade, um arcabouço teórico-metodológico que iluminou nossa análise do Códice, pois da mesma forma como fundamenta o estudo, já traz consigo os princípios que norteiam o método de análise, ou seja, a própria organização desses conceitos em uma sequência lógica já remete ao processo de interpretação a ser seguido quando se interpreta um sistema de signos existente, aqui materializado pela linguagem geométrica composta por desenhos e anotações de Leonardo da Vinci em seu Códice.

Considerando que redigimos este texto para comunicar os resultados de uma

pesquisa doutoral, e nossa intenção é que ele seja o mais compreensível possível, e considerando que os conceitos da semiótica são densos, fizemos um esforço para sintetizar as principais ideias da teoria, prioritariamente no que se refere à *interpretação dos signos (o interpretante)*, em um quadro síntese que relaciona aspectos dessa etapa da semiose a um grupo de questões que surgiram a partir do estudo do Códice Atlântico. Algumas já foram respondidas e outras serão apresentadas na análise a ser tratada na parte seguinte deste trabalho.

Quadro 8: Síntese da interpretação semiótica

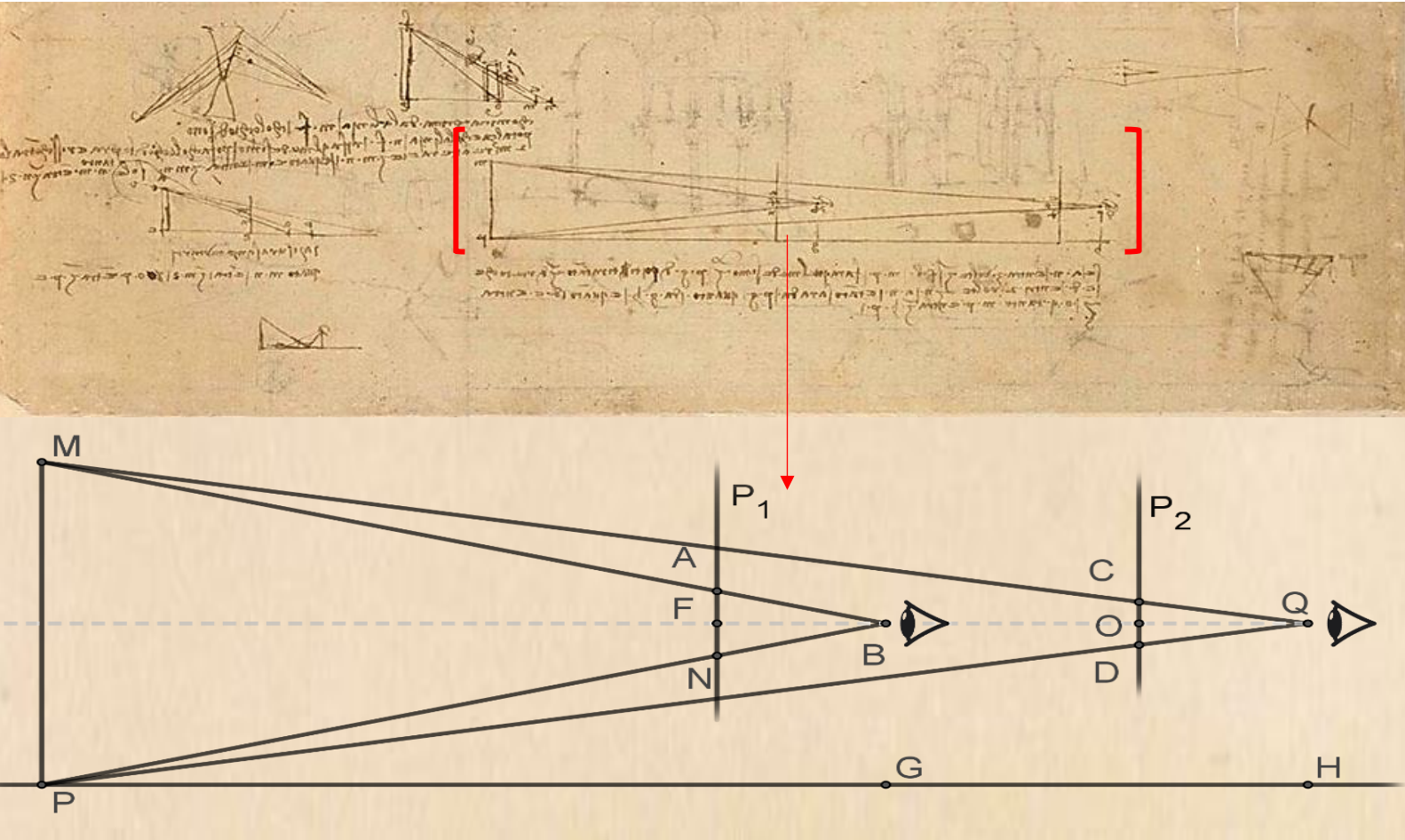
<p>Qualissignos icônicos e o efeito emocional</p> <p>Sinsignos indiciais e o efeito energético</p>	<p>Que impressões a folha com desenhos de Leonardo da Vinci lhe causa? Que traços você identifica na folha?</p> <p>Os desenhos da folha lhe lembram algo? O que vem em seu pensamento quando você olha os desenhos? Você acha que eles tratam de quê? O que eles indicam?</p>
<p>Legissignos simbólicos e o efeito lógico (a regra interpretativa)</p>	<p style="text-align: center;">Contexto artístico e sociocultural</p> <p>Em que contexto sociocultural os desenhos e anotações do Códice Atlântico foram elaborados? Que relações tais desenhos têm com o modo de pensar e com o contexto artístico da época? Que relações eles têm com a atividade artística de Da Vinci?</p> <p style="text-align: center;">Contexto geométrico</p> <p>Os desenhos geométricos remetem a que objetos geométricos? Esses objetos são de que campo da geometria? Os desenhos da folha tratam de algum problema ou situação específica? Quais?</p> <p style="text-align: center;">O Contexto da geometria escolar</p> <p>Que relações podem haver entre os objetos geométricos mobilizados por Da Vinci em seus estudos e os objetos da geometria escolar? Em que termos os objetos da geometria refletida no Códice Atlântico são os mesmos objetos de aprendizagem da geometria escolar? São similares? Não há relações entre tais objetos?</p>

Fonte: Elaborado a partir de Santaella (2012, 2005, 2018).

As questões do quadro 8, síntese da interpretação semiótica, representam algumas que foram processadas em nosso pensamento quando olhamos as folhas do Códice Atlântico pela primeira vez, o que gerou principalmente, efeitos emocionais além de outras questões que ocorreram em todos os momentos que essa experiência foi repetida durante o processo de investigação e análise, repetição que gerou efeitos energéticos e consequentes efeitos lógicos. Ou seja, essas questões refletem uma tentativa de materializar as interrogações que surgiram no nosso pensamento quando nos deparamos com as folhas do Códice Atlântico e as interpretamos por meio da regra interpretativa.

Todas essas questões serviram de guia para a interpretação dos desenhos em estudo, tal como as que serão apresentadas a seguir. Portanto, além de guiar o olhar e o pensamento, elas também auxiliaram na explicação e na escrita deste texto que relata os resultados dessa interpretação. Assim, o texto que produzimos é a síntese das respostas de todas essas questões e de outras que ocorreram no pensamento interpretativo, no momento da leitura dos desenhos.

Diante do exposto, finalizamos a Parte I do trabalho, que tratou do contexto geral da pesquisa e foi pensada e materializada para que o leitor possa ter uma visão geral do estudo que fizemos, dos seus objetivos, questões, do objeto de estudo, dos procedimentos e fundamentos adotados e dos encaminhamentos pedagógicos sugeridos, e para que o leitor conheça a fonte das informações, o seu autor e o contexto histórico e sociocultural de sua produção. Feita essa contextualização geral, passemos para a Parte II, que trata da análise semiótica das 13 folhas selecionadas.



PARTE II - DA ANÁLISE

Esta parte trata do exercício que envolve a trajetória da geometria do Códice à geometria escolar, com base em uma análise semiótica de 13 folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci. A análise foi organizada em quatro seções que tratam: da duplicação do cubo e os modos como Da Vinci a problematizou; da geometria espacial e projetiva identificada; da geometria plana e seus fundamentos refletidos e das artes da quadratura do círculo imaginadas e estabelecidas.

Sobre a trajetória da geometria do Códice à geometria escolar

Nesta parte, foram analisadas 13 folhas que abrangem os quatro temas (seis subtemas) da categoria geometria, na seguinte ordem: da duplicação do cubo e os modos como Da Vinci a problematizou; da geometria espacial e projetiva identificada; da geometria plana e seus fundamentos refletidos; e das artes da quadratura do círculo imaginadas e estabelecidas. Optamos por essa ordenação por termos identificado em nosso estudo que o foco de Leonardo da Vinci em seus estudos geométricos era a geometria sólida, principalmente as transformações volumétricas, estudo que, em seguida, ele estendeu para a geometria plana, por meio das transformações entre superfícies poligonais e entre superfícies poligonais e aquelas limitadas por curvas.

De certa forma, quando apresentamos os conceitos da semiótica a serem mobilizados na análise, na parte I, e exemplificamos a materialização dos conceitos na linguagem geométrica da folha 334r do Códice Atlântico, já demos indicativos dos procedimentos de análise e de como os conceitos da semiótica se vinculam e explicam a linguagem das folhas em estudo, ou seja, fizemos uma pré-análise. Diante disso, a análise será feita segundo os conceitos da semiótica, da mesma forma como os abordamos na parte II, qual seja: o fundamento do signo (significação); a relação do signo com o objeto (objetivação); e a relação do signo com o interpretante (a interpretação), que são as três etapas da semiose.

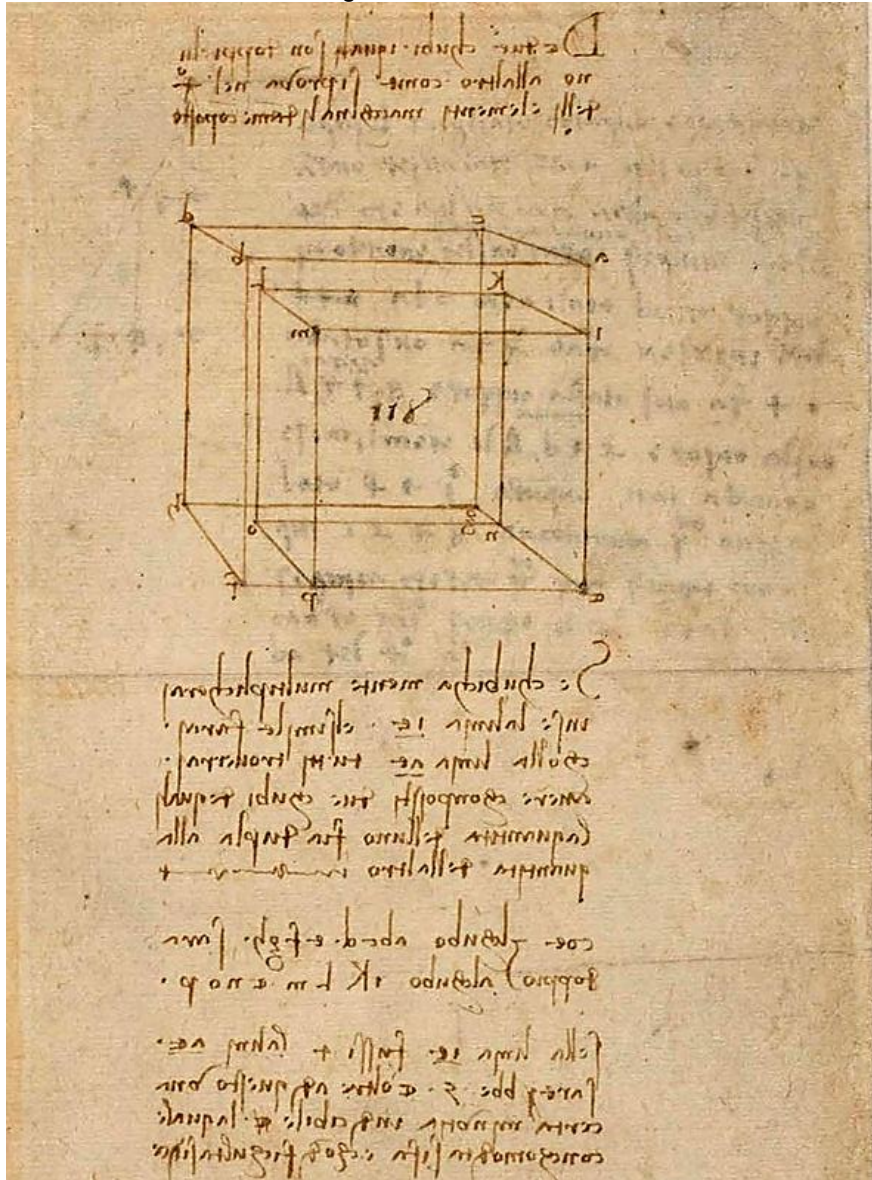
No contexto geral, analisamos folhas sobre geometria, por isso, alguns aspectos são comuns aos desenhos nelas contidos, principalmente os que concernem ao fundamento do signo, ou seja, as qualidades que já mencionamos, o ponto, a linha, a superfície, a dimensão etc. Assim, para minimizar as repetições no texto, somente a análise da duplicação do cubo seguirá rigorosamente as três etapas da semiose, nos demais subtemas analisados. Focaremos os aspectos particulares de cada folha, principalmente aqueles relacionados à interpretação e aos efeitos causados na mente interpretadora de acordo com a síntese da interpretação semiótica contida no quadro 8, apresentado no final da Parte I.

Da duplicação do cubo e os modos como Da Vinci a problematizou

A folha 161r (figura 30) trata da duplicação do cubo, que é um tema recorrente no Códice Atlântico, uma vez que é um dos três problemas clássicos da Antiguidade,

quais sejam: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. No desenho, Leonardo da Vinci constrói dois cubos, sendo que o menor possui aresta 4 braças. Esse é o cubo que ele pretende duplicar.

Figura 30: Folha 161



Fonte: Sánchez e Almarza (2008c, p. 57).

No centro do cubo, Leonardo da Vinci coloca o número 128 e no texto que escreve na referida folha questiona sobre o valor da raiz cúbica de 128. A questão a ser respondida é a solução do problema da duplicação, pois o valor será o tamanho da aresta do cubo, cujo volume é o dobro do volume de aresta 4 braças. Como o volume do cubo é calculado pelo valor da aresta elevado ao cubo ($v = a^3$), o volume

do cubo de aresta 4 braças é $4^3 = 64$ braças. Portanto, duplicá-lo, corresponde a encontrar um cubo cujo volume seja o dobro, ou seja, $2 \times 64 = 128$ braças.

De acordo com Sánchez e Almarza (2008c, p. 176), em resposta à questão, Leonardo da Vinci relata que a medida buscada é “5 mais uma quantidade cientificamente indefinível, mas praticamente alcançável com uma aproximação aceitável”, uma vez que a medida é aproximadamente 5,039. No entanto, Da Vinci não deixa claro o método que utilizou para chegar a esse resultado, o que exigiu que fosse feito um estudo mais aprofundado do problema em discussão.

A origem do problema da duplicação do cubo tem mais de uma versão e uma delas tem relação com a mitologia grega. Por volta do século IV (a.C.), a peste teria assolado Atenas e dizimado boa parte de sua população. Em busca de auxílio, os habitantes de Atenas enviaram uma delegação ao templo de Apolo, na ilha de Delos. No templo, existia um altar no formato cúbico e em troca do fim da peste, a divindade exigiu que fosse erguido um novo altar com o dobro do tamanho do anterior. Como o altar em forma de cubo tinha aresta 1 braça, os encarregados da obra concluíram que para construir o novo altar, com o dobro do tamanho, bastaria que se dobrasse o tamanho da aresta do primeiro cubo, ou seja, que se construísse um altar cúbico com aresta medindo 2 braças. Vejamos o que ocorreu.

Considerando o altar 1 com formato cúbico e com de aresta 1 braça, o seu volume seria: $V_1 = a_1^3 \rightarrow V_1 = 1^3 \rightarrow V_1 = 1$

Como o novo altar teria aresta 2 braças, o seu volume seria $V_2 = a_2^3 \rightarrow V_2 = 2^3 \rightarrow V_2 = 8$

Comparando os volumes, foi possível concluir que o primeiro altar teria volume de 1 braça cúbica e que o segundo altar teria volume de 8 braças cúbicas. Portanto, o segundo altar não teria o dobro do volume do primeiro, e sim 8 vezes o volume do primeiro. Diante disso, qual teria que ser a medida da aresta do novo altar de modo que ele tivesse o dobro do volume do primeiro?

Esse problema não foi resolvido e, por mais de 2 mil anos, muitos esforços foram feitos em busca de soluções. O fato é que a impossibilidade de resolução, apenas com a utilização dos instrumentos euclidianos, o compasso e a régua sem escalas, só foi admitida em meados do século XIX. Atualmente, com os recursos matemáticos disponíveis, o problema é resolvido algebricamente, pois dado um cubo

de aresta 1m, seu volume será $v_1 = 1^3 = 1m^3$. Duplicá-lo consiste em encontrar um cubo de aresta $\sqrt[3]{2}m$, cujo volume é $v = (\sqrt[3]{2})^3 = 2m^3$.

Esse problema remete às origens da geometria grega, oriunda dos conhecimentos matemáticos egípcios desenvolvidos pela necessidade de fazer medições precisas de terras, usadas no cultivo de alimentos, e que eram inundadas periodicamente pelas cheias do Rio Nilo. Segundo Proclus, nos seus escritos sobre o *Sumário de Eudemo*, a matemática egípcia teria sido trazida para a Grécia por Tales de Mileto, por volta do século VI a.C., quando retornou de sua ida ao Egito. Mesmo não sendo originária da Grécia, muito da geometria que se conhece ficou conhecida como geometria grega ou geometria euclidiana, devido ao modo de apropriação e sistematização dessa geometria para a matemática grega e ao principal registro desse conhecimento, em *Os elementos* de Euclides. Mas o que teria de inovador na geometria grega em relação à egípcia? (BICUDO, 2009).

Conforme Bicudo (2009, p. 77), a geometria egípcia era uma geometria prática e "tinha a experiência como critério de verdade" o que não foi suficiente para "contentar a exigência grega" pois estes tinham como princípio a especulação filosófica das coisas, do mundo à sua volta. Dessa forma, os gregos passaram a estudar a geometria com um novo olhar, tendo a razão, e não a empiria, como critério de verdade. Esse novo modo de ver e estudar a geometria fez com que ela adquirisse característica de uma ciência dedutiva, o que teve influência no desenvolvimento da geometria e da matemática como um todo.

As características dedutivas que a geometria grega passou a ter podem ser exemplificadas pelo estabelecimento de regras como a exigência de demonstração, da qual não se tem registros na matemática egípcia e babilônica, mas somente a partir do advento da geometria grega, e a feitura de construções geométricas utilizando somente a régua não graduada e o compasso, como é o caso da solução do problema da duplicação do cubo (BICUDO, 2009).

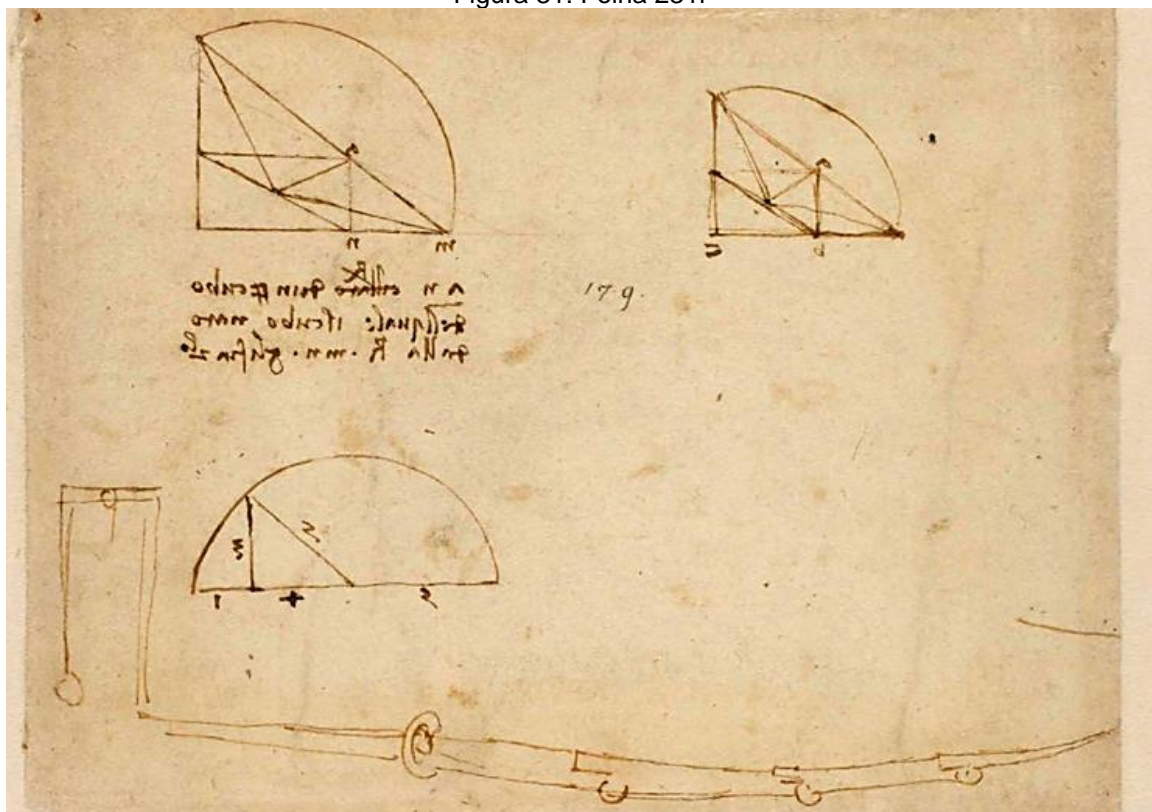
Algumas soluções foram encontradas, porém, sem cumprir a exigência de se utilizar somente régua não graduada e o compasso. Dentre as soluções, podemos citar as de antigos estudiosos e geômetras como Diocles, Nicomedes, Hipócrates, Platão, Erastóstenes, Árquitas, Menécmo e Hierão, e as de matemáticos mais recentes, como os italianos, Gaetano Buonafalce, Giuseppe Vargiù e Gaetano Boccali. Somente no século XIX o matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814-

1848) provou a impossibilidade da solução do problema da duplicação do cubo usando somente régua não graduada e compasso (SOUSA, 2001).

Além dos estudiosos citados anteriormente, Leonardo da Vinci também estudou o problema e buscou resolvê-lo. Tomou como base soluções e tentativas de geometras antigos por meio de obras como *Os elementos* de Euclides e o *De expetendis et fugiendis rebus opus* de Giorgio Valla (1447-1500). Os estudos de Da Vinci sobre o problema foram registrados em suas anotações e, no Códice Atlântico, há pelo menos oito folhas desses registros com algumas tentativas de demonstração e suas problematizações e experimentações. Dentre as folhas, selecionamos três: a folha 161, a partir da qual apresentamos o problema; e as folhas 231 e 588, nas quais Leonardo da Vinci tentou demonstrar a duplicação do cubo por métodos similares.

Iniciemos o estudo pela folha 231r (figura 31) com foco nas propriedades que a habilitam a agir como signo, dentre as quais se inclui o aspecto qualitativo de difícil apreensão.

Figura 31: Folha 231r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008d, p. 55).

Expressar esse aspecto dos desenhos de Leonardo da Vinci na folha 231r não é simples, pois exige que os olhemos com um novo olhar, um olhar livre de juízo de

valor e de interpretações. É necessário estar aberto ao fenômeno que se apresenta e se perguntar: que coisa é essa que temos diante de nós?

Ao olhar para a folha 231r, nos deparamos com uma superfície de fundo amarelada com desenhos que têm cor semelhante ao amarelo, porém com uma tonalidade mais escura que o fundo, o que os destaca. São pelo menos quatro desenhos em destaque, dois na metade superior e dois na metade inferior, além de um bloco de texto e um número no centro da folha que parece ser 179.

Nesses desenhos, é possível observar pontos, linhas retas nas direções horizontal, vertical e diagonal, linhas curvas, letras e números. Dentre as linhas retas e curvas, há aquelas que formam contornos, regiões fechadas que contêm área, característica de desenhos bidimensionais, já que não identificamos a tridimensionalidade nos desenhos da folha. Na folha, há deformidades nas bordas e manchas e o último desenho da parte inferior, de difícil reconhecimento, parece ter sido cortado junto à margem direita.

A folha 231r é um existente, pois ela se encontra, fisicamente na Biblioteca Ambrosiana de Milão, mas o que temos aqui e agora é uma imagem da referida folha, uma fotografia que será olhada como tal e não como a folha original. Olhar para a folha aqui neste texto não é a mesma coisa que olhar a mesma folha no seu contexto original, pois há elementos da folha e do seu contexto que não podem estar presentes (existentes) na imagem que temos. Para começar, não estamos na Biblioteca Ambrosiana, no interior, na atmosfera de uma Biblioteca inaugurada em 1609, além disso, as cores da folha podem ter sido deformadas na reprodução, as dimensões originais (148 x 185 mm) não são as mesmas da imagem que temos aqui (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

No entanto, essas características tornam a folha 231 algo singular, único, da mesma forma a sua reprodução existente neste texto. Isso porque tanto a folha original quanto a sua reprodução possuem a qualidade existencial, que é reforçada, ainda, por todas as qualidades que as compõem, já descritas anteriormente. Portanto, a existência da folha e da sua reprodução, bem como a unicidade dos elementos que compõem seus desenhos, conferem a ela o caráter singular característico do sinsigno.

O caráter de lei pode ser entendido como as convenções a que os desenhos da folha estão sujeitos no aspecto geral (convenções históricas e socioculturais) e específico (convenções da arte e da geometria), pois trata-se de desenhos feitos em uma época (séculos XV e XVI) e em um contexto histórico e sociocultural. Essas

convenções impuseram aos desenhos algumas condições como: as técnicas e materiais usados, os motivos que levaram Leonardo a desenhar, o que ele pretendia com esses desenhos e as relações dos desenhos com os objetos da geometria, por exemplo. Essas condições originam categorias gerais nas quais os desenhos se incluem, e isso caracteriza o aspecto de lei.

Segundo Navoni (2012), no que se refere às técnicas e aos materiais, são desenhos feitos, principalmente, a carvão, à sanguina e à pena, nos quais Leonardo da Vinci utilizou tinta, lápis negro, ponta seca (metálica), compasso, régua e papel. Com relação às motivações que teriam levado Leonardo da Vinci a fazer tais desenhos, destacam-se, segundo Isaacson (2017), sua curiosidade extrema, a incessante vontade de conhecer e a busca por fundamentos científicos para a sua arte.

Assim, esses desenhos podem ser classificados: quanto às técnicas e materiais empregados; quanto às condições socioculturais de sua produção; e quanto a sua relação com os objetos da geometria. A possibilidade de esses desenhos serem inseridos em classes e categorias gerais revela que eles são portadores da propriedade da lei, que, por sua vez, se origina, principalmente, a partir das convenções socioculturais a que tais desenhos estavam sujeitos, bem como das condições e motivações para sua produção.

Já mencionamos anteriormente que esta seção foca o método da duplicação do cubo operacionalizado por Leonardo da Vinci. Dessa forma, o objeto dinâmico da folha 231r é um dos métodos que ele utilizou em seus estudos sobre a duplicação do cubo, ou seja, os desenhos da folha (três dentre os quatro) se referem a esse problema, sugerem, indicam e representam tal problema e o fazem de um modo específico, que é o modo como Leonardo da Vinci os fez, os desenhou. Esse modo particular é o objeto imediato da folha 231r. Em outras folhas, sobre o mesmo problema (que têm o mesmo objeto dinâmico), ele o fez de outro modo, ou seja, o objeto imediato é outro, mas se refere ao mesmo objeto dinâmico.

Como já foi dito, a folha 231r possui as três propriedades que a habilitam a agir como signo; ela é um qualissigno, um sinsigno e um legissigno e, como sabemos, a depender do fundamento considerado, ela pode sugerir o seu objeto (ícone), indicar o objeto (índice) ou representar o objeto (símbolo). Então, vamos explicitar os aspectos icônico, indiciais e simbólicos da folha em estudo.

A folha 231r contém quatro desenhos que se destacam. Com exceção do último da parte inferior, nos demais predomina um conjunto de qualidades que, por comparação e similaridade, se assemelham a qualidades de entes geométricos e, por isso, podem ser ícones desses entes. Dessa forma, a principal sugestão que os qualissignos icônicos fazem é que os desenhos em destaque são desenhos geométricos.

No entanto, a relação indicial se sobressai à icônica, por ser mais direta e clara, pois essas qualidades se materializam em existentes que indicam e apontam para objetos geométricos existentes. Os pontos determinam segmentos de retas que se organizam e formam regiões fechadas e, como essas regiões têm lados retos, elas indicam polígonos, especificamente retângulos e triângulos; por sua vez, as linhas curvas indicam círculos ou partes dele (semicírculos). Além disso, a figura como um todo indica que pode haver uma relação entre os elementos que a compõem. Tornaremos essa relação mais explícita quando falarmos do interpretante.

Não há dúvida que os desenhos da folha 231r indicam entes geométricos, mas por outro lado foram feitos por Leonardo da Vinci, que não era um geômetra, mas sim um artista renascentista. Isso faz com que a propriedade da lei desses desenhos se origine (ou se insira) em dois contextos: o da arte e o da geometria. O principal aspecto de lei ligado à arte, que também tem interseções com a geometria, é o porquê desses desenhos, as motivações e objetivos de Leonardo da Vinci ao fazê-los. Parte disso já foi dito anteriormente e será retomado mais adiante, por depender diretamente, da interpretação dos desenhos.

A partir desta parte do trabalho, discutiremos os efeitos que a folha 231r pode provocar ou provoca de fato no intérprete. Ela pode provocar efeitos porque possui uma interpretabilidade, um potencial, um poder interpretativo que está latente e que, por isso, lhe é interno e independente do intérprete. Essa interpretabilidade é o interpretante imediato. Assim, mesmo não sendo vista por alguém, mesmo que permaneça guardada na Biblioteca Ambrosiana de Milão ou nas versões impressas do Códice Atlântico, a folha 231r continua contendo as propriedades que lhe habilitam para agir como signo: os elementos qualitativos, existenciais e simbólicos, pois estas lhe são internas, estarão latentes, mas lá estarão garantindo a possibilidade de agirem, de serem atualizadas em uma possível semiose.

O efeito que o signo produz é singular, pois é efetivado em um intérprete particular, ou seja, o que relatamos neste texto sobre a folha 231r, o fizemos em

decorrência dos efeitos que ela e seus desenhos (signos) causaram em nós, particularmente, o que remete a um certo grau de subjetividade. No entanto, o percurso de análise que seguimos, iniciado como as propriedades qualitativas, existenciais e de lei do signo, e concluído com os efeitos interpretativos, “segue uma lógica que obriga o analista a se desprender de uma visão puramente subjetiva”. Então, passemos aos efeitos de fato provocados pela folha 231r, o interpretante dinâmico que se subdivide nos níveis: emocional, energético e lógico.

Nesta semiose específica, o efeito emocional e as primeiras impressões que a folha causou podem ser traduzidas como simpatia, nostalgia e interesse: simpatia pelo fato de que os elementos qualitativos descritos (ponto, linhas, regiões poligonais como retângulos e triângulos) remetem à nossa área de atuação, que é o ensino e a pesquisa em Educação Matemática, ou seja, os desenhos da folha têm algo que nos é próximo; nostalgia, no sentido de um certo saudosismo, algo que remete ao passado, pois a folha tem elementos característicos do envelhecimento como manchas e imperfeições nas bordas que causam a impressão de que se trata de algo feito em um passado distante; e é justamente isso, junto à simpatia pelos desenhos, que nos causou interesse pela folha e seu conteúdo.

O interesse é algo que está no limite entre o interpretante emocional e o interpretante energético, que é o segundo efeito geralmente provocado pelo sinsigno indicial, isso porque, ao indicar, eles “dirigem a retina mental do intérprete, chamam a sua atenção, os movimentam na direção do objeto que indicam”, o que lhe exige um gasto de energia. Os elementos existentes na folha 231r foi o que nos moveu, nos impulsionou a investigar o seu conteúdo, a buscar compreender a sua referencialidade, a decifrar os “códigos secretos” que existem na folha (assim como em tudo que é de autoria de Leonardo da Vinci) e sair da superficialidade na tentativa de desvelar suas camadas mais profundas.

Sob o efeito energético, empreendemos uma busca por reunir elementos que fossem elucidativos do conteúdo da folha e que revelassem o seu campo de referências. Iniciamos a investigação pela descrição da folha que nos ajudou a identificar o foco principal dos desenhos e, além disso, buscamos textos que tratassem do mesmo tema tratado na folha 231r e fizemos o estudo do material.

Fizemos, também, uma tradução (livre) da transcrição do texto de Leonardo da Vinci contido na folha 231r, na tentativa de confirmar a origem do método usado e como ele procedeu, mas o texto é curto e não foi suficiente para nossa necessidade,

foi então que decidimos utilizar uma segunda folha que contém um desenho similar à folha 588r. Além do desenho, a folha contém uma descrição mais ampla e detalhada, bem como um longo texto de Leonardo da Vinci, cuja transcrição nós traduzimos, objetivando compreender e explicar o método que ele usou na duplicação do cubo nas folhas referidas.

Mas ainda estamos falando do interpretante energético ou dos procedimentos metodológicos do trabalho? Bom, essas ações (investigações) descritas compõem os procedimentos metodológicos, mas foram desencadeadas pelo interpretante, por conta do efeito energético que a folha 231r causou. Isso serve para que se entenda melhor esse interpretante e que se confirme a afirmação de Santaella (2018, p. 6) de que a semiótica aqui empregada é “um percurso metodológico-analítico”, por guiar a análise bem como os seus procedimentos.

Toda essa movimentação que o efeito energético gerou fez com que o nosso repertório sobre o tema em estudo se ampliasse. A necessidade de compreender, de interpretar o conteúdo da folha nos impeliu a buscar novos conhecimentos sobre a duplicação do cubo e sobre as motivações que levaram Leonardo da Vinci a fazer suas experimentações e tentativas de resolver o problema. Essas novas informações, aliadas às que já tínhamos, ajudaram a compor a *regra interpretativa* necessária à interpretação dos símbolos que geram o interpretante lógico, o terceiro efeito provocado pelo signo na mente interpretadora.

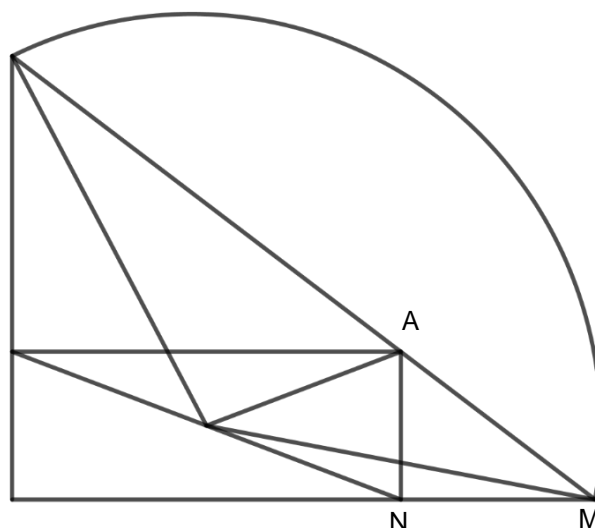
O foco de análise é o problema da duplicação do cubo. Dentre os desenhos da folha 231r (figura 31), há três que se referem a ele, mas como nas anotações Leonardo da Vinci não se refere ao desenho que está na parte central da folha, focamos os dois que ficam na parte superior. Eles são similares, feitos em escalas diferentes, por isso, nossa análise teve como foco somente um deles, em destaque na figura 32, que retrata um desenho feito a partir do de Leonardo da Vinci contido na folha 231r.

O desenho representa um método para determinação por via geométrica das médias proporcionais utilizadas na solução do problema da duplicação do cubo ou problema de Delo. Segundo a descrição da folha, os estudos nela contidos foram feitos por Leonardo da Vinci de acordo com o método de Filópono e de Parménion referido por Giorgio Valla (1447-1500), que foi um tradutor e filólogo italiano que publicou alguns livros e tratados, dentre eles em o *De expetendis et fugiendis rebus*

*opus*¹², com 40 livros em 2 volumes ao qual, possivelmente, Leonardo da Vinci teve acesso, pois, segundo Capra (2008), um compêndio desse mesmo autor foi publicado em Veneza em 1501 e julgamos ser o *De expetendis* (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008d).

A partir de uma cópia digital desse tratado, identificamos no 13º livro um capítulo destinado à duplicação do cubo, no qual um desenho similar ao de Leonardo da Vinci se encontra vinculado aos nomes Heron e Philopones. Em trabalhos que estudamos sobre o tema, desenho similar está identificado como método de Herão. Mesmo sem a certeza de quem foi o autor do método, tal fato não interfere no nosso objetivo, pois o que queremos é fazer sua análise, compreender e explicar como Leonardo da Vinci o fez e estabeleceu relações com os objetos da geometria.

Figura 32: Desenho sobre a duplicação do cubo



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008d, p. 55).

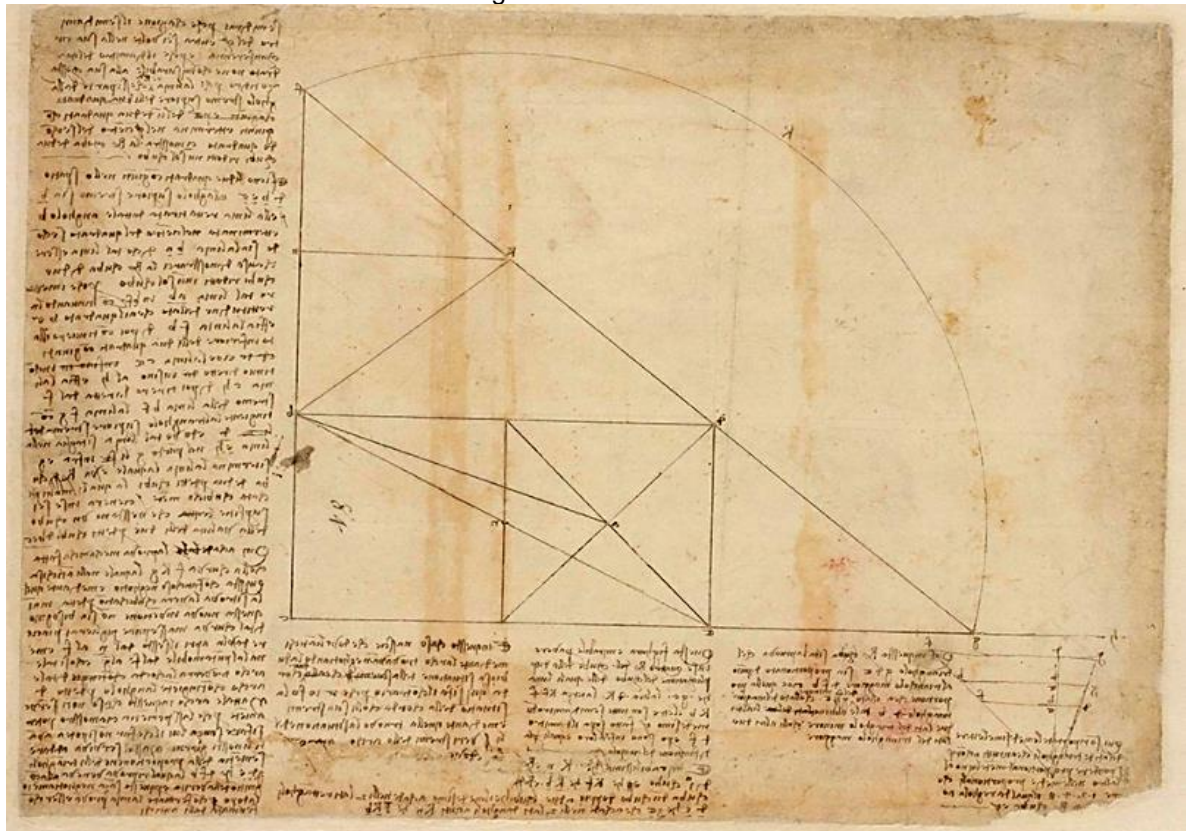
Identificamos no desenho em destaque um retângulo sobre o qual foi traçada uma de suas diagonais. Do que parece ser o ponto médio da diagonal, partem três segmentos de reta e um desses segmentos parece ser o raio do semicírculo. Os lados horizontal inferior e o lado vertical esquerdo do retângulo são prolongados até encontrarem um segmento de reta oblíquo, que toca o retângulo em um de seus vértices no qual foi marcado o ponto A. Abaixo desse ponto, o outro vértice do retângulo foi identificado com a letra N e à direita deste último pode-se identificar o

¹² Uma cópia digital encontra-se disponível em:
http://books.google.com/books/about/de_expetendis_et_figiendis_rebus_opus.html?hl=pt-BR&id=XixLAAAACAAj.

ponto M . Os pontos AMN formam um triângulo que é retângulo em n . Além desse triângulo, há outros, dentre os quais destacam-se o que tem como um dos catetos o lado maior do retângulo (superior) e aquele que circunscribe o retângulo.

A transcrição do texto atribuído a Leonardo da Vinci enuncia “*a n radice d’un cubo del quale il cubo nato dalla radice m n gli fia duplo*”, cuja tradução (livre) que fizemos é: o cubo de raiz MN tem volume igual ao dobro do volume do cubo de raiz AN . Esse texto poderia ser escrito da seguinte forma: Consideremos o cubo 1 de volume V_1 , cuja aresta é o segmento \overline{AN} , teremos que seu volume é $V_1 = (AN)^3$. Consideremos, agora, o cubo 2 de volume V_2 cuja aresta é \overline{MN} , teremos então seu volume dado por $V_2 = (MN)^3$. Os cubos 1 e 2 estão relacionados de forma que o volume do cubo 2 é o dobro do volume do cubo 1, $V_2 = 2V_1$, ou seja, $(\overline{MN})^3 = 2(\overline{AN})^3$, $\overline{MN} = \sqrt[3]{2\overline{AN}}$. Isso é o que foi possível inferir pela interpretação do desenho e das anotações, embora não exista alguma afirmação conhecida que comprove a nossa conclusão. Para complementar o raciocínio usado por Leonardo da Vinci na folha 231r (consideramos que ele somente mostrou uma parte do método para duplicação do cubo) lançamos mão da folha 588r (figura 33).

Figura 33: Folha 588r

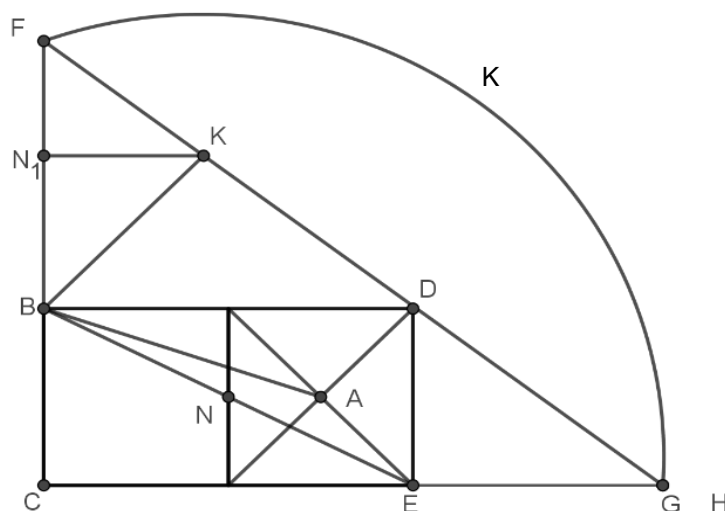


Fonte: Senchez e Almarza, (2008j, p. 109).

A folha contém um estudo mais detalhado da duplicação do cubo e utiliza o mesmo método da folha 231r para a determinação das médias proporcionais. Não será feito um estudo detalhado da folha 588r, como foi feito da 231r, pois, como mencionado anteriormente, a folha 588r é um outro modo de o signo representar seu objeto; ela se refere ao mesmo objeto da folha 231r, ou seja, possui o mesmo objeto dinâmico por meio de outro objeto imediato que é o modo diferente de o representar. Assim, fizemos o estudo da folha apenas segundo o interpretante dinâmico lógico, o qual está em discussão.

A folha 588r contém um grande desenho central, em volta do qual há 4 colunas de texto (uma na lateral esquerda e três abaixo do desenho) e um desenho menor no canto inferior direito, abaixo do qual há um quinto bloco de texto. Segundo sua descrição, a folha trata da determinação das duas médias proporcionais, ou seja, trata de uma solução para o problema da duplicação do cubo, pois o cubo duplo terá aresta igual a uma dessas médias. O desenho é bem visível, mas há algumas letras (pontos na linguagem geométrica) que não são legíveis. Por isso, refizemos o desenho e identificamos os pontos por letras maiúsculas (figura 34) para compreender e explicar com mais eficiência, sobre o que se trata.

Figura 34: Determinação das médias proporcionais



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza, (2008, p. 109).

Para fazer essa reconstituição e colocar os pontos (F, K, D, C etc.) nos lugares corretos, precisamos fazer um estudo cuidadoso, cruzando informações do desenho,

da descrição e da transcrição do texto de Leonardo da Vinci que traduzimos. Partindo do desenho, o descrevemos e discutimos o seu procedimento de construção e sua relação com a duplicação do cubo. Iniciemos pela descrição.

O desenho é composto por um grande triângulo retângulo FCG , retângulo em C . Das extremidades de sua hipotenusa FG parte um arco de circunferência FK_1G . No interior do triângulo, há um retângulo $BCED$, cujo lado horizontal CE mede o dobro do lado vertical DE ($CE = 2DE$). Esse retângulo é dividido em dois quadrados, assim, cada quadrado tem lado DE . É possível identificar, também: os pontos K e D sobre a hipotenusa do triângulo maior; H a direita de G ; N_1 no segmento BF ; N no centro do retângulo; A no centro do quadrado da direita interno ao retângulo; e alguns segmentos de reta, dentre os quais destacamos BA, BE e BK . Passemos ao procedimento que Leonardo da Vinci seguiu para construir o desenho.

Inicialmente, Leonardo da Vinci construiu um retângulo cujo lado horizontal mede o dobro do lado vertical ($CE = 2DE$), então ele determinou o ponto médio dos dois lados horizontais e os uniu por um segmento que divide o retângulo de modo a formar dois quadrados de mesma área. Cada quadrado é a face do cubo que se deseja duplicar. Leonardo da Vinci prolongou, indefinidamente, o lado horizontal do retângulo para a direita obtendo o segmento CH e o lado vertical esquerdo para cima. Traçou uma das diagonais do retângulo BE e determinou o centro do retângulo N que é a interseção de BE com o lado do quadrado da direita.

Neste ponto da construção, Leonardo da Vinci precisou determinar dois pontos sobre os prolongamentos dos lados do retângulo, feitos anteriormente, de modo que a distância do centro do retângulo (N) a cada um desses pontos seja a mesma. Para isso, o procedimento dos antigos geômetras tomado como base por Leonardo da Vinci, orienta que se use o compasso e a régua simultaneamente. O compasso deveria ser centrado em N e a régua deveria ser posta obliquamente, passar pelo vértice D do retângulo e interceptar os prolongamentos nos pontos F e G de modo que $FN = NG$. Movimentando a régua e o compasso pelo método das tentativas, se encontram os pontos F e G de modo a obedecer à condição ($NF = NG$), com N sendo o centro do semicírculo FK_1G .

Ocorre que essa parte do procedimento é de difícil execução, pois não há exatamente um modo de o fazê-lo, a não ser por tentativa e erro. A régua precisa ser fixada no ponto D e girada. Assim, a régua ficará oscilante e cada movimento dela irá

alterar o comprimento do segmento que vai de C até os pontos de intersecção da régua com os prolongamentos (os catetos do triângulo maior). Desse modo, a cada movimento da régua se verificaria, com o compasso, se as distâncias de cada ponto de intersecção da régua com os prolongamentos, até o ponto N , seriam iguais.

É neste ponto que Leonardo da Vinci dá a sua contribuição ao método, por não se contentar com a imprecisão que ele contém. Segundo Sánchez e Almarza (2008, p. 249), ele se refere ao procedimento como uma situação duvidosa, pois os antigos o faziam “negociando a situação duvidosa da corda” (*negoziando la dubbiosa situazione dela corda*), o que se tornava uma tarefa difícil de ser realizada, uma negociação cansativa (*faticoso negozio*) devido à imprecisão causada, principalmente, pela oscilação da régua nas tentativas de determinação dos pontos F e G .

Leonardo da Vinci, então, tem uma ideia que resolve a *la dubbiosa situazione dela corda*. Ele encontra o centro do quadrado da direita, ponto A , traça o segmento BA e “descobre” que esse segmento tem a mesma medida de BF ($BA = BF$). Em seguida, ele centra o compasso em N , faz a sua abertura até F e traça o semicírculo FK_1G determinando o ponto G de modo que $NF = NG$.

Dizer que Leonardo da Vinci teve uma ideia que resolveu o problema da oscilação da corda, que continha o método dos antigos geômetras, e descrevê-la sucintamente, parece representar que foi uma ideia obtida facilmente, mas pelo que se conhece de Leonardo da Vinci, pode se inferir que ele pode ter passado muitos dias e noites em claro, tentando encontrar tal solução, pois ele era extremamente persistente e, às vezes, obsessivo quando desafiado, principalmente se tratando de algo que ele tinha prazer em fazer: suas investigações científicas, dentre elas aquelas sobre geometria. Mesmo que a solução seja mecânica, isso não tira o mérito de seu feito, pois ele usava a ferramenta que dominava como artista: o desenho, que nesse caso é o centro da solução do problema da duplicação do cubo.

Leonardo da Vinci reconhece a contribuição dos antigos e se refere à figura como admirável e maravilhosa, pois, por meio dela, foi possível encontrar a solução para o problema. Segundo Sánchez e Almarza (2008, p. 248), há pelo menos quatro segmentos que são a aresta do cubo duplo: “um é GE o outro é DK , o terceiro KF e o quarto KB ”¹³. Ao final do procedimento, tem-se que BF e EG são as médias

¹³ *l'una è g e, l'altra d K, la terza K f, quarta K b.*

proporcionais que se pretendia encontrar e que EG é a aresta do cubo que tem o dobro do volume do cubo cuja face é um dos quadrados construídos, portanto com aresta DE .

Mas como comprovar que a solução proposta por Da Vinci com base nos antigos, tem validade matemática?

A interpretação que fizemos até esta parte do trabalho, fruto do interpretante lógico, foi possível por termos internalizado a regra interpretativa, conhecimentos necessários para tal interpretação. Mas essa regra foi sendo moldada no processo de estudo a partir de experiências que tivemos com o tema (o estudo em si do tema: leituras, dúvidas, aprendizados e conclusões a que chegamos). Trata-se da *experiência colateral* com o campo de referência do signo, da imersão que fizemos no contexto dos desenhos contidos nas folhas 231r e 588r.

Para exemplificar tal experiência (uma vez que seu resultado está por todo o texto), discutiremos a seguir os métodos¹⁴ de duplicação do cubo de Hipócrates e Hierão que têm relação direta com o método contido nas folhas 231r e 588r do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci.

Hipócrates de Chios (460 a.C. – 370 a.C.) teria sido o primeiro a conseguir apresentar uma solução para o problema. Na verdade, ele não o resolveu; ele encontrou o caminho, um meio que levava à solução. A contribuição de Hipócrates foi significativa, pois, a partir dele, seus sucessores seguiram o caminho por ele indicado. Hipócrates descobriu que o problema poderia ser resolvido se conseguisse inserir duas meias (ou médias) proporcionais entre dois segmentos dados, sendo que o maior teria que ter o dobro do tamanho do menor. E como seria esse procedimento?

A esse respeito, podemos mencionar que parece um problema simples, se for resolvido com o uso da álgebra moderna, como veremos a seguir.

Considere um cubo 1 de aresta a , seu volume será $V_1 = a^3$. Precisamos encontrar um cubo 2 cujo volume seja o dobro do volume do cubo 1, ou seja, $V_2 = 2V_1$. Para determinar o volume de um cubo, basta determinar sua aresta. Assim, precisamos determinar a aresta do cubo 2, que podemos chamar de x . Dessa forma, $V_2 = x^3$ mas $V_2 = 2V_1$. A partir dessa igualdade, teremos que: $x^3 = 2a^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{2a^3} \rightarrow x = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{2} \rightarrow x = a \cdot \sqrt[3]{2}$

¹⁴ Nos embasamos no trabalho de Sousa (2001) e ampliamos a discussão.

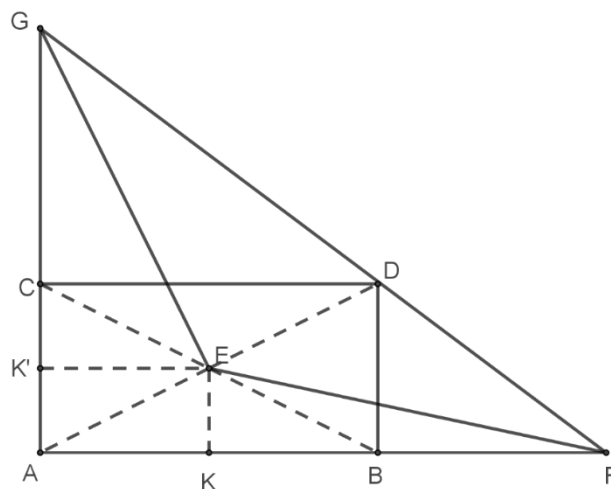
Assim, fica determinada a aresta do cubo 2 com o dobro do volume do cubo 1, e poderá ser obtida pela multiplicação da aresta do cubo 1 (a) por $\sqrt[3]{2}$. Mas esses recursos não poderiam ser usados por Hipócrates no século V a.C., que utilizou conhecimentos sobre proporções para propor um caminho que poderia levar à solução do problema.

Inserir duas médias proporcionais entre dois segmentos, cujo comprimento do maior é o dobro do menor equivale a obter a seguinte proporção:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Em que a e $2a$ são os segmentos (a é a aresta do cubo que se quer duplicar), e x e y as médias proporcionais. Considerando a primeira igualdade, temos que $x^2 = ay$ e, por conseguinte, (I) $y = \frac{x^2}{a}$. Pela segunda igualdade $\frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, temos que (II) $y^2 = 2ax$. Substituindo (I) em (II) teremos: $\frac{x^4}{a^2} = 2ax \rightarrow \frac{x^4}{x} = 2a \cdot a^2 \rightarrow x^3 = 2a^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{2a^3} \rightarrow x = \sqrt[3]{a^3 \cdot 2} \rightarrow x = a \cdot \sqrt[3]{2}$. Portanto x seria a aresta do cubo cujo volume é o dobro do cubo de aresta a . Como já mencionamos, as tentativas feitas após a descoberta de Hipócrates seguiram a busca pelas médias proporcionais, já que ele havia convertido um problema em outro (SOUSA, 2001). A figura 35 retrata uma dentre as soluções encontradas, qual seja a de Hierão de Alexandria (séc. I d.C.).

Figura 35: Método de Hierão



Fonte: Elaborada a partir de Sousa (2001).

Esse método consiste em determinar dois pontos (F e G) com características particulares de tal forma que, a partir desses pontos, é possível encontrar as médias

proporcionais. Para isso, consideram-se os dois segmentos CD e DB , entre os quais se quer inserir as médias proporcionais, e a partir desses segmentos, constrói-se o retângulo $ABDC$ do qual se determina o centro, ponto E , que é a interseção de suas diagonais. Traça-se o segmento FG de modo que ele passe pelo vértice D do retângulo $ABDC$. FG intersecta o prolongamento de AC em G e de AB em F , de modo que $EF = EG$.

A partir da figura, é possível inferir que as médias proporcionais entre CD e DB são os segmentos CG e BF , ou seja, é possível se obter a seguinte proporção: $\frac{CD}{CG} = \frac{CG}{BF} = \frac{BF}{DB}$, mas ela carece de prova, o que poderá ser feito por meio da Proposição 6 do Livro II de *Os elementos*, de Euclides, que tem o seguinte enunciado:

Caso uma linha reta seja cortada em duas, e seja adicionada a ela alguma reta sobre uma reta, o retângulo contido pela reta toda junto com a adicionada e pela adicionada, com o quadrado sobre a metade, é igual ao quadrado sobre a composta tanto da metade quanto da adicionada (EUCLIDES, 2009, p. 140).

Seja K o ponto médio de \overline{AB} , mas $\overline{AB} = \overline{CD}$. Por Euclides 6.II, temos que $\overline{AF} \cdot \overline{FB} + \overline{BK}^2 = \overline{FK}^2$. Se for adicionado \overline{KE}^2 a ambos os membros, obteremos: $\overline{AF} \cdot \overline{FB} + \overline{BK}^2 + \overline{KE}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{KE}^2$. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos BKE e FKE , obtém-se: $\overline{EB}^2 = \overline{BK}^2 + \overline{KE}^2$ e $\overline{EF}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{KE}^2$. Substituindo as duas igualdades obtidas pelo teorema de Pitágoras na equação anterior, teremos a seguinte igualdade: $\overline{AF} \cdot \overline{BF} + \overline{EB}^2 = \overline{EF}^2$ (I).

Agora, tomemos K' ponto médio de \overline{AC} . Novamente por Euclides 6. II, teremos $\overline{AG} \cdot \overline{CG} + \overline{CK'}^2 = \overline{GK'}^2$. Agora se for adicionado $\overline{K'E}^2$ a ambos os membros e aplicado, novamente, o teorema de Pitágoras aos triângulos $GK'E$ e $CK'E$, obteremos de forma análoga à anterior: $\overline{AG} \cdot \overline{CG} + \overline{CE}^2 = \overline{GE}^2$ (II).

Mas, $\overline{EB} = \overline{CE}$ e $\overline{EF} = \overline{GE}$ e se essas igualdades forem substituída em (I), teremos: $\overline{AF} \cdot \overline{BF} + \overline{CE}^2 = \overline{GE}^2$ que pode ser escrita na forma $\overline{AF} \cdot \overline{BF} = \overline{GE}^2 - \overline{CE}^2$. Mas (II) pode ser escrita da forma $\overline{AG} \cdot \overline{CG} = \overline{GE}^2 - \overline{CE}^2$. As últimas formas de (I) e (II) permitem que se obtenha a igualdade (III) $\overline{AF} \cdot \overline{BF} = \overline{AG} \cdot \overline{CG}$, a partir da qual, ainda, pode se obter a proporção (III) $\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{BF}}$.

Considere agora os triângulos GCD , GAF e DBF . Como são semelhantes, é possível obter a seguinte proporção (IV): $\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DB}}$. Substituindo (III) em (IV), obteremos $\frac{\overline{CG}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DB}}$ que é equivalente a $\frac{\overline{CD}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DB}}$, mas $\overline{CD} = 2\overline{DB}$. Então: $\frac{2\overline{DB}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DB}}$. Da primeira igualdade $\frac{2\overline{DB}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{BF}}$ tem-se (V) $\overline{CG}^2 = 2\overline{DB} \cdot \overline{BF}$ e da segunda $\frac{\overline{CG}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DB}}$ tem-se (VI) $\overline{BF}^2 = \overline{CG} \cdot \overline{DB}$. Elevando-se a igualdade (VI) ao quadrado e substituindo (V) nessa nova igualdade, teremos:

$$\overline{BF}^4 = 2\overline{DB} \cdot \overline{DB}^2 \cdot \overline{BF} \rightarrow \frac{\overline{BF}^4}{\overline{BF}} = 2\overline{DB}^3 \rightarrow \overline{BF}^3 = 2\overline{DB}^3 \rightarrow \overline{BF} = \sqrt[3]{2} \overline{DB}$$

Portanto, fica provado que, dado um cubo de aresta \overline{DB} , pelo procedimento acima, é possível determinar a aresta de outro cubo cujo volume é o dobro do volume do primeiro cubo sendo \overline{BF} a aresta do cubo duplo.

A localização dos pontos F e G são cruciais nesse método, pois são eles que determinam uma das extremidades dos segmentos que representam as médias proporcionais. As fontes que encontramos sobre o método de Hierão não explicitam como seria o procedimento exato de localização desses pontos o que, por outro lado, ficou claro na solução de Leonardo da Vinci, e principalmente, no seu descontentamento com a imprecisão desse procedimento. Assim, por não se contentar com a situação duvidosa da régua, ele desenvolveu um procedimento que complementaria o método de Hierão e que poderia, inclusive, ter sido usado por seus sucessores (os de Leonardo da Vinci) se tivessem tido acesso aos estudos sobre duplicação do cubo, mas, infelizmente, os estudos de Da Vinci não foram publicados à sua época e muito do que se conhece sobre ele só veio à tona no século XX.

Apesar de parecer um procedimento simples, consideramos que a descoberta de Leonardo da Vinci, que ele chamou de “la mia prova”, foi um avanço para sua época e crucial no aprimoramento do método, pois a sua solução se aproximou das exigências de se resolver o problema usando somente a régua não graduada e o compasso uma vez que, determinando o ponto F (figura 34) ou G (figura 35), se poderia abdicar do uso da régua, pois somente com o compasso se poderia localizar o outro ponto que daria origem à outra média proporcional. Isso só comprova que Leonardo da Vinci estava à frente de seu tempo e antecipou algumas descobertas, como a que discutimos anteriormente.

Portanto, as folhas 231r e 588r de Leonardo da Vinci são signos, por serem portadoras das três propriedades que as habilitam para tal: a qualidade, o existente e a lei. Dessa forma, podem sugerir, indicar ou representar seu objeto dinâmico que, em última análise, é o problema da duplicação do cubo que está presente de modo singular nessas folhas, modo esse que é o objeto imediato do signo. Além disso, esse objeto representado de modo singular pode provocar efeitos em uma mente potencial (o interpretante imediato) e provoca, de fato, esse efeito, quando se apresenta a uma mente interpretadora real (o interpretante dinâmico), sendo que este efeito pode ser uma emoção (Interpretante emocional), uma ação (interpretante energético), ou um ato cognitivo (interpretante lógico).

O interpretante lógico remete ao caráter simbólico dos desenhos de Leonardo da Vinci, pois estão submetidos a convenções socioculturais que determinam a eles representarem o que representam. As convenções podem ser as internas ao contexto da matemática, ao contexto da arte ou aquelas que intercedem ambos.

As do contexto matemático são, por exemplo, as que determinam o que é uma reta, um ponto, um retângulo um triângulo ou aquelas que impõem normas como a necessidade se usar somente régua não graduada e compasso, que estipulam que tal desenho se refere ao problema da duplicação do cubo mesmo não contendo nenhum cubo no desenho, pois assim convencionou-se na comunidade de matemáticos de uma época, que esse problema está inserido no contexto da geometria sólida (estereometria) que faz parte da geometria e este último do corpo de conhecimentos da matemática etc.

Podem ser convenções relacionadas à arte, pois nele se usou determinada técnica e material, segundo as convenções existentes na comunidade de artistas renascentista, as mesmas convenções que impuseram a Leonardo da Vinci a necessidade de fazer os estudos que originaram esses desenhos, pois era imperioso que ele agisse assim. Disso dependia sua sobrevivência e seu reconhecimento como artista no meio em que viveu, pois tal reconhecimento poderia atrair os Mecenas, os patrocinadores das artes na época. Esse patrocínio gerava concorrência, disputa e rivalidades entre artistas como Michelangelo e Leonardo da Vinci, em determinada época de suas vidas.

Ainda restam as interseções. Ocorre que em um certo momento no contexto da arte renascentista a pintura não era considerada uma arte de nível elevado, pois era considerada uma arte mecânica para a qual não se precisaria de um alto nível

intelectual, ao passo que a poesia ou a música o eram. Então, o estudo de disciplinas como anatomia e matemática, o que já era comum nos ateliês onde se formavam os artistas da época, para Leonardo da Vinci se tornou obsessivo (no bom sentido do termo), pois ele não aceitava que a pintura fosse uma arte menos importante. Ele tinha como meta elevar o *status* social da pintura e por conseguinte dos pintores. Essa imposição do contexto da arte que o direcionou para os estudos científicos (em especial a geometria, por ser para ele uma arte) o levou a elaborar desenhos como os que analisamos neste trabalho.

Tudo que mencionamos são as marcas do contexto sociocultural (no sentido amplo) que estão submersas nas camadas mais profundas dos desenhos de Leonardo da Vinci e que só puderam emergir por meio da persistência e da dedicação que tivemos ao empreender este estudo. Além disso, o trabalho foi iluminado pelos conceitos que compõem arquitetura teórica e metodológica da semiótica discutida nos estudos de Santaella (2005, 2012, 2018).

E as relações com os objetos da geometria escolar?

O problema da duplicação do cubo não é um dos objetos de aprendizagem da geometria estudada na Educação Básica, porém, ele geralmente aparece entre os problemas de geometria espacial a serem resolvidos por estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Ocorre que esse problema nem sempre é destacado nos documentos oficiais e livros didáticos, como um dos grandes problemas da matemática, muito menos são evidenciados os avanços que a geometria obteve com o esforço de todos os que trabalharam na busca por soluções. Assim, julgamos importante que os estudantes tenham conhecimento desse problema, de sua história e das principais contribuições que ele trouxe à geometria, como forma de conhecerem sobre a epistemologia da matemática e passarem a conhecer mais sobre esse corpo de conhecimentos importante para toda a humanidade.

Na geometria escolar o objeto de aprendizagem *cubo* faz parte da geometria espacial e seu ensino está previsto no 2º ano, 3º ano e 5º ano do Ensino Fundamental. No 2º ano, o estudante precisa “reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico” (BRASIL, 2017, p. 281). Esse é o mesmo objetivo de ensino do objeto cubo no 3º ano. No 5º ano espera-se que ao estudar esse tema o estudante possa associar a grandeza volume a sólidos geométricos como por exemplo o cubo.

O reconhecimento do cubo como um objeto da geometria bem como o estabelecimento de relações desse objeto com a grandeza volume, são objetivos de ensino que poderão ser atingidos por meio dos estudos das folhas de Leonardo da Vinci. Tendo em vista a faixa etária dos estudantes do Ensino Fundamental Menor (1º ao 5º ano, numa situação ideal crianças de 6 a 10 anos) não se poderá propor o problema da duplicação do cubo, no entanto, desenhos como o da folha 161 e pequenas explicações sobre o seu contexto, poderão contribuir com as aprendizagens pretendidas para esse objeto.

De outro modo, alunos do 2º ano do Ensino Médio (com idade próxima aos 16 anos) poderão ter contato com o problema da duplicação do cubo de forma a complementar suas aprendizagens e a ampliar seus conhecimentos sobre a geometria e a matemática em geral. Isto é possível porque, além de estudar o contexto específico da geometria, o estudante teria contato com aspectos relacionados ao desenvolvimento histórico e epistemológico da matemática e as suas relações com outros contextos como o artístico, por exemplo. Mas isso não é contemplado nos livros didáticos de matemática do 2º ano do Ensino Médio?

O livro didático de matemática é uma das ferramentas utilizadas pelo professor de matemática da Educação Básica (em alguns casos, a única). Em uma análise de livros didáticos, Martins (2017) concluiu que tais livros carecem de complementação no que se refere aos aspectos históricos da matemática e às suas relações com outras áreas de conhecimento com as quais tem intersecções. Tanto em Martins (2017), quanto neste trabalho, não se quer afirmar que o livro didático não contribui com o aprendizado, e sim propor complementações ao seu conteúdo, com vistas ao aprendizado mais efetivo possível, a julgar as particularidades de cada estudante.

Para exemplificar nossa intenção, tomamos uma das coleções para o Ensino Médio aprovadas na seleção do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), do Ministério da Educação (MEC), para ser utilizada nas escolas no triênio 2018 – 2020. Trata-se da Coleção intitulada Matemática Paiva¹⁵, da Editora Moderna. No volume 2, geralmente utilizado no 2º ano do Ensino Médio, o objeto cubo está no capítulo 9, prismas e pirâmides.

Na abertura do capítulo, há fotografias de um prédio, um armário, paralelepípedos para pavimentação de ruas e de uma colmeia de abelhas, as quais o

¹⁵ Essa coleção é a que foi utilizada (em 2020) por mim nas escolas e turmas em que sou professor no Estado do Pará.

autor relaciona ao conteúdo do capítulo. Com relação ao objeto cubo, o autor diz o que é, apresenta um desenho com as arestas e a diagonal do cubo e descreve as fórmulas para cálculo da diagonal (D), área total (A_T) e Volume V , conforme figura 36. Na sequência a página do livro contém um exercício resolvido e exercícios propostos.

Figura 36: O objeto cubo no livro didático

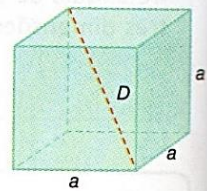
3 Cubo

O cubo (hexaedro regular) é um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas têm todas a mesma medida a . Para calcular a medida D de uma diagonal do cubo, a área total A_T e o volume V , basta aplicar as fórmulas correspondentes do paralelepípedo reto-retângulo, considerando as três dimensões iguais a a , isto é:

$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = a\sqrt{3}$$

$$A_T = 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) \Rightarrow A_T = 6a^2$$

$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$$



EXERCÍCIO RESOLVIDO

- 6 Sabendo que uma diagonal de uma face de um cubo mede $5\sqrt{2}$ cm, calcular desse cubo:
- a) a medida de uma diagonal; b) a área total; c) o volume.

Resolução

- a) Indicando por a a medida da aresta do cubo, podemos representá-lo conforme a figura abaixo. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC , obtemos a medida da aresta:

$$a^2 + a^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2a^2 = 50$$

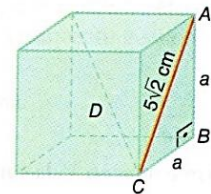
$$\therefore a = 5$$

Assim, a medida D da diagonal desse cubo é:

$$D = a\sqrt{3} \Rightarrow D = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

b) $A_T = 6a^2 \Rightarrow A_T = (6 \cdot 5^2) \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$

c) $V = a^3 \Rightarrow V = 5^3 \text{ cm}^3 = 125 \text{ cm}^3$



Fonte: Paiva (2015, p. 208).

A apresentação do objeto de aprendizagem cubo no livro em destaque é feita de forma curta e direta e isso pode favorecer a apreensão de aspectos como o reconhecimento do objeto, seus elementos (arestas, diagonal) e as fórmulas necessárias para medições de comprimentos, áreas e volumes a ele relacionados. O que propomos é que este formato pode ser complementado por relações estabelecidas com outros elementos como, por exemplo, o conteúdo das folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, que tratam do cubo e do problema da sua duplicação discutido anteriormente.

As relações poderão ser estabelecidas se o problema for apresentado na sala de aula e discutido pelo professor e os estudantes. Essa discussão, mediada pelas tentativas de Da Vinci, poderá ser o ponto de partida para que os estudantes identifiquem e apreendam o objeto geométrico cubo (e seus elementos) e outros objetos relacionados às tentativas do artista, como proporcionalidade de triângulos, razão e proporção, além das relações desse objeto com o contexto histórico e epistemológico da matemática e com outros contextos como o da arte. Para prosseguir nossa análise, passemos ao estudo das folhas sobre a geometria espacial e projetiva identificada.

Da geometria espacial e projetiva identificada

O estudo de áreas de figuras geométricas planas e do volume de sólidos são temas aos quais Leonardo da Vinci dedicou boa parte de seu tempo, ao longo dos anos. Esses estudos foram registrados por meio de desenhos e anotações como os da folha 100r do Códice Atlântico (figura 37).

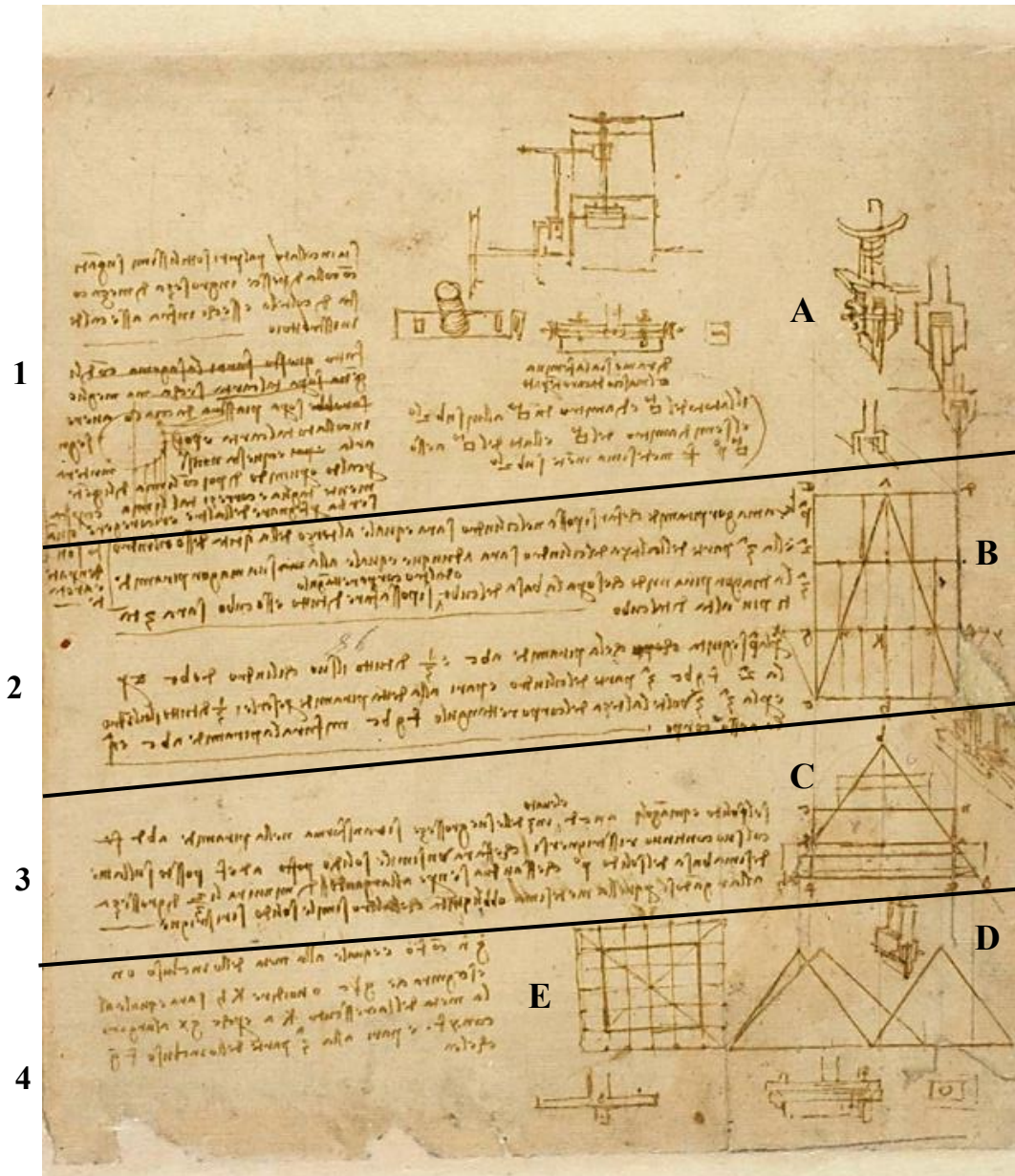
Nela há dois temas predominantes: a construção de uma máquina de corte e a geometria, esta última é objeto de estudo neste texto. É possível que esses temas tenham relação, pois o formato da lâmina de corte pode ter influência na sua eficiência; no entanto, em nosso estudo, não iremos considerar a possibilidade de correlação entre os temas, pois para atingir nosso objetivo, é suficiente considerarmos as possíveis relações entre os desenhos geométricos e as anotações de Leonardo da Vinci na folha.

O verso da folha 100r não é legível, por isso, consideramos os desenhos do reto sobre o qual fizemos algumas marcações: três retas que dividem a folha em quatro partes indicadas pelos números 1, 2, 3 e 4 e as letras A, B, C e D, que destacam quatro desenhos. Neste texto, aprofundaremos somente o estudo da parte (2), considerando o texto e o desenho (B), e a parte (4), da qual consideramos somente o desenho (E), por não encontrarmos correlação deste com o texto que está na mesma parte o que, vale ressaltar, era uma característica das anotações de Leonardo da Vinci, pois ele fazia anotações de diferentes temas na mesma folha, ou seja, nem sempre há correlação entre as partes da folha como os desenhos e os textos escritos.

Na parte superior da folha (1), há um grupo de desenhos que se referem à construção de um escopro (A) que é um instrumento para corte (uma espécie de

lâmina) geralmente utilizado no entalhe de materiais como madeira, pedra, mármore e metais, que pode ter sido pensado por Leonardo da Vinci para ser utilizado em atividades como as de escultor uma das artes praticadas na época.

Figura 37: Folha 100r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008b, p. 71).

O texto que está próximo dos desenhos orienta sobre o procedimento de construção da ferramenta, como no trecho em que, de acordo com Sánchez e Almarza (2008b, p. 208), Da Vinci registrou o seguinte: "faça este desenho em papel seco e cole sobre uma chapa de aço para marcá-la e depois cortá-la". Abaixo do primeiro grupo de desenhos e anotações, do lado direito da folha, é possível observar a

presença de quatro desenhos geométricos predominantes: (B) um triângulo inscrito em um retângulo, subdividido em três porções retangulares, cada uma destas divididas em seis porções retangulares, totalizado 18 porções, que compõem a área do retângulo; (C) um triângulo com retângulos horizontais sobrepostos; (D) um grupo de três triângulos que se interceptam; e (E) um conjunto de dois quadrados concêntricos subdivididos em quadrados menores, um com 36 e outro com 16 porções quadradas. Os desenhos destacados estão na figura 37 que retrata a folha em estudo.

Os desenhos mencionados foram chamados por nós de triângulos, retângulos, triângulo inscrito, quadrado etc., mas esses são os objetos a que se referem os desenhos, ou seja, os desenhos têm como objeto dinâmico, objetos da geometria que, na verdade não estão no papel, sim na mente de quem os interpretou. Desse modo, os desenhos geométricos da folha foram assim classificados por se referirem (por sugestão, indicação ou representação) a objetos da geometria que foram atualizados, na mente interpretadora, por meio da interpretação, ou seja, dos efeitos causados na mente interpretadora.

O efeito emocional, que nos causou as primeiras impressões sobre a folha, e o efeito energético, que nos fez buscar informações com vistas à compreensão do conteúdo da folha, nos fizeram identificar que na folha há dois temas¹⁶ geométricos principais que são: a duplicação do quadrado e a relação entre sólidos geométricos. Ele relaciona o volume do prisma ao da pirâmide e o volume do cilindro ao do cone. Leonardo da Vinci discute essas relações, fundamentado, principalmente, em *Os elementos de Euclides*, fato que detectamos por meio da tradução de suas anotações. Inclusive, em algumas anotações, Leonardo da Vinci faz enunciados equivalentes a algumas proposições de *Os elementos*.

O efeito lógico, por sua vez, foi provocado pelos estudos que fizemos no entorno dos objetos geométricos aos quais os signos da folha se referem, ou seja, os estudos sobre a duplicação do quadrado e a relação entre volume de sólidos. Esses estudos se referem ao estudo do Códice Atlântico e da literatura sobre: o Códice Atlântico, sobre Da Vinci, sobre a duplicação do quadrado e relações entre volumes de sólidos geométricos, além dos documentos oficiais e livros didáticos de

¹⁶ A presente seção tem como foco a Geometria espacial e projetiva e incluiria somente a discussão sobre sólidos geométricos e perspectiva, já que há outra seção para a geometria plana. No entanto, o conteúdo da folha se mostrou profícuo para o estabelecimento de relações com os objetos da geometria escolar, que é nosso objetivo. Isso nos levou a analisar, nesta parte do texto, também, aspectos relativos à geometria plana, contidos na folha 100r.

matemática. De posse das informações advinda dos estudos referidos, interpretamos a linguagem geométrica da folha 100r do Códice Atlântico. Quando utilizamos a expressão “de posse das informações”, queremos dizer que internalizamos a regra interpretativa necessária à interpretação da folha mencionada e para relacioná-la à geometria escolar. O relato seguinte é o resultado dessa interpretação.

Inicialmente, destacamos a parte 2 da folha cujo texto trata da duplicação do quadrado que ocorre por uma relação entre lado e diagonal. Ela é explicitada por Leonardo quando ele anota: “o lado de um quadrado é o diâmetro de um quadrado subduplo e a metade do diâmetro do quadrado é o lado do quadrado a esse primeiro também subduplo”¹⁷. Ressaltamos que o diâmetro a que ele se refere é a diagonal do quadrado e a palavra subduplo denota um quadrado com metade da área de outro quadrado dado. Leonardo da Vinci não demonstrou esse enunciado, o que nos levou a fazê-lo.

Poderemos expressar essa relação da seguinte maneira: 1) Dado um quadrado $ABCD$ de lado l , portanto, com área l^2 , sua diagonal será o lado de um quadrado $BDEF$ cuja área é o dobro da área do quadrado $ABCD$, como consequência; 2) A medida da diagonal do quadrado $BDEF$ terá o dobro da medida do lado do quadrado $ABCD$, ou seja, a semidiagonal do quadrado $BDEF$ tem medida igual ao lado do quadrado $ABCD$, o que pode ser demonstrado a partir dos quadrados $ABCD$ e $BDEF$ da figura 38.

Façamos primeiro a prova da afirmativa 1.

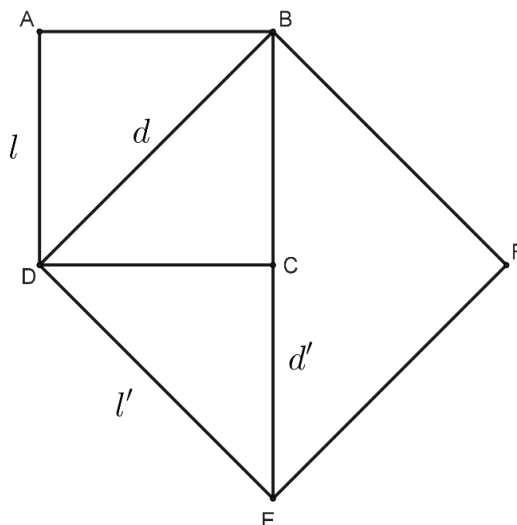
Considere que o lado de $ABCD$ é l . Como a área de um quadrado é medida pelo lado ao quadrado, a área de $ABCD$ é $s_1 = l^2$. Já a diagonal d pode ser determinada pelo teorema de Pitágoras, uma vez que $d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow d = \sqrt{2l^2} \rightarrow d = l\sqrt{2}$. Agora, considere o quadrado $BDEF$ e suponha que seu lado l' tenha mesma medida da diagonal do quadrado $ABCD$, $l' = l\sqrt{2}$; assim, a área de $BDEF$ será $s_2 = (l\sqrt{2})^2 \rightarrow s_2 = 2l^2$ e, como $s_1 = l^2$, conclui-se que $s_2 = 2s_1$.

Façamos, agora, a prova da afirmativa 2.

Agora precisamos mostrar que a diagonal de $BDEF$ é o dobro do lado de $ABCD$. Novamente pelo teorema de Pitágoras $d'^2 = l'^2 + l'^2 \rightarrow d' = l'\sqrt{2}$, mas $l' = l\sqrt{2}$, então $d' = l\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \rightarrow d' = l\sqrt{4} \rightarrow d' = 2l$ ou $l = \frac{d'}{2}$.

¹⁷ Il lato del quadrato è diametro d'un quadrato a lui subduplo. E'l semidiametro del quadrato é 'l lato del quadrato a esso quadrato primo medesimamente subduplo (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 208).

Figura 38: Quadrados ABCD e BDEF



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008b).

Como provamos as afirmações 1 e 2, fica provado que um quadrado com lado igual à diagonal de um quadrado dado terá área igual ao dobro da área do primeiro. Vale ressaltar que a duplicação do quadrado é um problema que remete à Antiguidade grega e foi resolvido geometricamente (pelo uso de régua e compasso) nesse período, tendo como princípio a construção de um quadrado com lado sobre a diagonal do quadrado que se deseja duplicar, ou seja, o mesmo princípio do qual nos valem.

Esse problema faz parte da história da matemática e caracteriza o seu desenvolvimento na Grécia antiga. Ele foi trazido à tona pelos desenhos e anotações de Leonardo da Vinci na folha 100. Assim, a discussão do problema foi disparada pelos efeitos que os signos da folha causaram em nós e pela interpretação do desenho de Da Vinci, que revelou uma geometria histórica. Esse movimento que relaciona aspectos históricos da geometria, os desenhos de Leonardo da Vinci e os objetos da geometria escolar é o que poderá contribuir para que o ensino de geometria praticado na Educação Básica seja o mais eficiente possível, ou seja, que os estudantes apreendam os objetos da geometria ensinados e os relacionem a outros contextos, principalmente ao contexto da arte, da história da arte e da matemática (MARTINS, 2020).

Aparentemente, a duplicação do quadrado não tem relação com os estudos sobre sólidos geométricos contidos na folha. Porém, para demonstrar as relações entre volumes de sólidos nesse caso específico, Da Vinci utilizou as seções dos sólidos que são figuras geométricas planas. Isso nos leva a inferir que a duplicação

do quadrado que ele descreve no texto da folha faz parte de suas experimentações e tentativas de relacionar as transformações entre figuras planas às transformações volumétricas.

A referida demonstração está na parte (2) que identificamos e as anotações a ela referentes estão ao lado do desenho (B), que retrata um triângulo inscrito no retângulo. Da Vinci organiza o texto procedendo com características de uma demonstração matemática, pois parte de algo já válido para provar o que pretende. O seu procedimento lógico consiste em três enunciados e uma conclusão, organizados em quatro parágrafos, sendo três com os enunciados identificados por: *primeiro*, *segundo*, *terceiro* e uma conclusão, que sintetiza os três enunciados e os relaciona com o desenho ao lado. Façamos o estudo dos três enunciados, respectivamente:

Primeiro. A maior pirâmide que pode ser feita no cilindro será igual a um terço da quantidade do cilindro; Segunda. E a terça parte da altura do cilindro será, portanto, igual a sua maior pirâmide; Terceira. A pirâmide maior, sobre a base do cubo ou de outro corpo retangular, poderá ser transformada em um cubo cuja altura é a terça parte da altura da pirâmide (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 208)¹⁸.

A primeira afirmação causa um estranhamento, inicialmente, pois a relação conhecida na geometria atual, se estabelece entre os volumes da pirâmide e de um prisma de mesma base e não entre pirâmide e cilindro. Para esclarecer tal situação, consultamos duas publicações em português de *Os elementos* de Euclides (1944, 2009)¹⁹. Em Euclides (1944, p. 126), a definição XVIII do Livro XI afirma que “Pirâmide cônica é uma figura sólida, que fica formada pela revolução inteira de um triângulo retângulo ao redor de um lado daqueles que compreendem o ângulo reto [...]”.

Sabemos que a revolução completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos gera um cone, ou seja, o que é chamado de pirâmide cônica é o que se conhece como cone, atualmente. Isso pode ser comprovado por Euclides (2009, p. 482), no qual há a definição de cone cuja essência é a mesma de Euclides (1944). Porém, o termo *pirâmide cônica* não é usado, mas sim a palavra *cone*. Assim, entendemos que ao mencionar o termo pirâmide na primeira afirmação, Leonardo da

¹⁸ Prima. La maggior piramide che far si possa nel cilindro, sarà equale al terzo della quantità d'esso cilindro; Seconda. E la terza parte dell'eattezza del cilindro sarà adunque equale alla sua maggior pirâmide; Terza. La maggior piramide, che sopra la basa del cubo o d'altro corpo rettangolo si possa fare di tutto esso cubo, sarà tre tanti più alta di tal cubo.

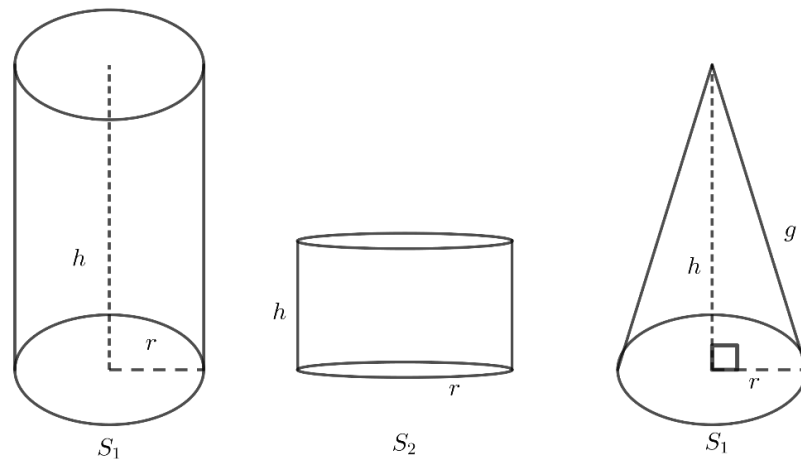
¹⁹ A publicação de 1944 foi traduzida para o português por João Ângelo Brunelli (1722-1804) no século XVIII a partir de uma versão em Latim de Frederico Commandino (1509-1575). A publicação de 2009 foi traduzida do grego para o português por Irineu Bicudo (1940-2018).

Vinci não se refere à pirâmide, e sim à pirâmide cônica, ou seja, ao cone cujo volume tem relação com o volume do cilindro.

Destacamos que Leonardo da Vinci pode ter usado o termo pirâmide onde seria cone, por ser o termo “pirâmide cônica”, o usual na época (como registrado em Euclides, 1944), ou por algum equívoco na tradução de *Os elementos* de Euclides do grego ou do latim para o italiano. Como já mencionamos anteriormente, a primeira edição impressa de *Os elementos* foi publicada em Veneza (em latim) no ano de 1482 e pode ter sido adquirida por Leonardo da Vinci, assim como outra edição de 1509 de Luca Pacioli (1447-1517).

Assim, concluímos que quando Leonardo da Vinci escreve “a maior pirâmide que pode ser feita no cilindro” ele se refere ao cone como o conhecemos atualmente. Dessa forma, nosso entendimento é que a relação que ele pretendia estabelecer na primeira afirmação é aquela entre os volumes do cilindro e do cone que constam em *Os elementos de Euclides* na proposição 10 do Livro XII: “Todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual” (EUCLIDES, 2009, p. 543). Essa relação está representada na figura 39 e no texto que se segue.

Figura 39: Relação entre cilindro e cone



Fonte: Elaborado a partir de Euclides, 2009.

Considere os cilindros S_1 , S_2 e o cone S_3 com mesmo raio ($r_1 = r_2 = r_3$), cujas alturas são h_1, h_2 e h_3 e volumes são V_1, V_2 e V_3 . Considere que a altura de S_2 é a terça parte da altura de S_1 , ou seja, $h_2 = \frac{h_1}{3}$. Como o volume do cilindro é o produto da área da base pela altura, ou seja, $V_1 = A_b \cdot h \rightarrow V_1 = \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1$. Da mesma forma,

$V_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2$. Mas $h_2 = \frac{h_1}{3}$, logo, $V_2 = \pi \cdot r_1^2 \cdot \frac{h_1}{3}$ que é equivalente a $V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1$, mas $\pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 = V_1$, portanto, $V_2 = \frac{1}{3} v_1$. Sabe-se, ainda, que o volume do cone é a terça parte do volume do cilindro $V_3 = \frac{1}{3} v_1$, mas como $V_2 = \frac{1}{3} v_1$, $V_3 = V_2$. Desta última relação, pode-se afirmar, então que o volume de um cone é equivalente ao de um cilindro com mesma base e altura igual à terça parte do cone. Mas esta última relação é exatamente o que foi observado por Leonardo da Vinci no segundo enunciado: “E a terça parte da altura do cilindro será, portanto, igual a sua maior pirâmide”.

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, Da Vinci estende a relação entre cilindro e cone para os sólidos, pirâmide e prisma, quando na terceira afirmação anota “a pirâmide maior, sobre a base do cubo ou de outro corpo retangular, poderá ser transformada em um cubo cuja altura é a terça parte da altura da pirâmide”, ou seja, uma pirâmide tem volume equivalente ao de um cubo com um terço de sua altura, desde que a pirâmide e o cubo tenham a mesma base.

Há indícios de que a afirmação feita por Da Vinci na folha 100r tem como fundamento o Livro XII de *Os elementos*, cuja proposição 7 é: “Todo prisma, tendo um triângulo como base, é dividido em três pirâmides iguais entre si, tendo triângulos como bases” (EUCLIDES, 2009, P. 539). Dessa forma, uma pirâmide com mesma base e altura de um dado prisma tem volume igual à terça parte do prisma, ou ainda, se o prisma for dividido em três partes de mesmo volume, cada um deles (prismas com um terço da altura do primeiro) terá volume equivalente ao da pirâmide em estudo. Segundo Euclides (2009, p. 540), essa relação é estendida para prismas e pirâmides que tenham bases diferentes dos triângulos, pois “[...] é evidente que toda pirâmide é uma terça parte do prisma que tem a mesma base com ela e igual altura [...]”, o que também é feito por Da Vinci na terceira afirmação

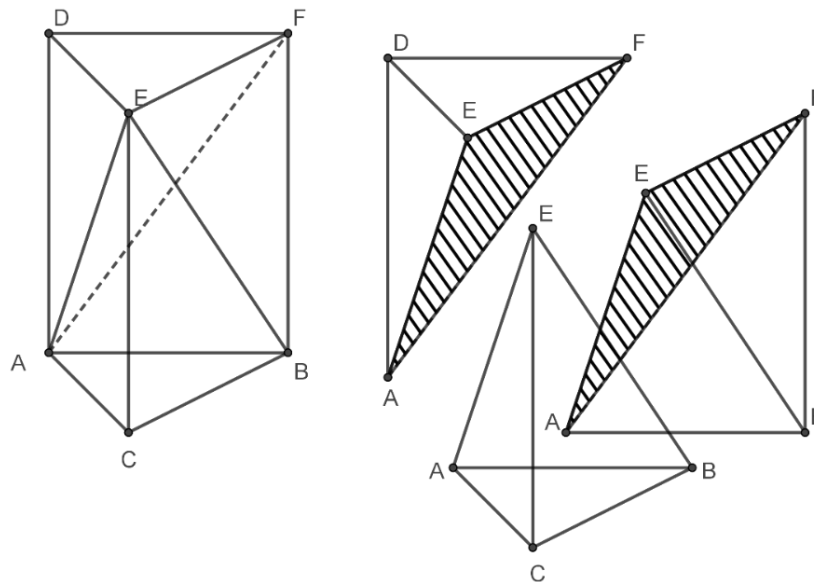
Em Euclides (2009, p. 539), a demonstração dessa relação é feita a partir de um desenho que retrata um prisma de base triangular que é seccionado de forma a originar as três pirâmides de mesmo volume. De forma análoga, essa demonstração é encontrada em alguns livros didáticos de matemática do Ensino Médio na Educação Básica, visto que nem todos demonstram essa relação e somente a apresentam de forma direta. O desenho mencionado é semelhante ao da figura 40, no qual a secção do prisma $ABCDEF$ origina as pirâmides $DEFA$, $ABCE$ e $AEBF$.

Façamos tal demonstração com o objetivo de reafirmar o que já foi provado por Euclides e fazer a conexão com os livros didáticos de matemática da Educação

Básica, uma vez que temos como foco o ensino de geometria nesse nível de ensino. Assim, demonstraremos a partir de Euclides (2009, p. 539-540) e dos nossos conhecimentos da geometria escolar da Educação Básica.

Considere o prisma $ABCDEF$ (figura 40) cujas bases são os triângulos DEF e ABC (congruentes) e cujas faces laterais são os quadriláteros $ADFB$, $ACED$ e $CBFE$. Ocorre que cada face do prisma possui uma diagonal que divide cada uma delas em dois triângulos congruentes entre si. Assim, temos que: a diagonal AE de $ACED$ origina os triângulos AEC e AED (congruentes); a diagonal BE origina os triângulos BEC e BEF (congruentes); e a diagonal AF origina os triângulos ABF e ADF (congruentes).

Figura 40: Relação entre volume do prisma e da pirâmide



Fonte: Elaborado a partir de Euclides, 2009.

Considere, ainda, que a secção desse prisma dá origem a três pirâmides $ABCE$ (1), $DEFA$ (2) e $ABEF$ (3), todas de base triangular (figura 40). Precisamos provar que as pirâmides em estudo possuem o mesmo volume. Para essa prova, tomaremos como princípio a propriedade P_1 , segundo a qual, duas pirâmides triangulares de mesma altura e bases de mesma área têm o mesmo volume.

Pirâmides (1) e (2): As pirâmides $ABCE$ (1) e $DEFA$ (2) têm como bases DEF e ABC , que são congruentes por serem as bases do prisma $ABCDEF$. Mas os segmentos CE e AD têm mesma medida, já que são os lados paralelos do quadrilátero $ACED$, e como são as alturas relativas às bases de (1) e (2), as pirâmides têm mesma altura.

Assim, como (1) e (2) têm bases congruentes e mesma altura, por P_1 , têm o mesmo volume.

Pirâmides (2) e (3): Com já mencionamos a diagonal AF do quadrilátero $ABFD$ origina os triângulos ABF e ADF que são congruentes e são as bases das pirâmides (2) e (3). Mas as alturas das pirâmides em estudo, são iguais à distância do ponto E até o plano que contém o quadrilátero $ABFD$.

Assim, as pirâmides (2) e (3) têm bases congruentes e mesma altura, portanto, por P_1 têm mesmo volume.

Portanto, como a pirâmide (1) tem mesmo volume que a pirâmide (2) e a pirâmide (2) tem mesmo volume que a pirâmide (3), conclui-se que (1) e (3) tem mesmo volume. Logo as três pirâmides têm mesmo volume. Como elas foram originadas a partir da divisão de um prisma, cada uma delas terá volume equivalente à terça parte do volume do prisma.

Sendo S_b a área da base do prisma $ABCDEF$ e h sua altura, o volume do prisma V será $V = S_b \cdot h$. Considerando o que foi demonstrado anteriormente, o volume da pirâmide V_p será $V_p = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$.

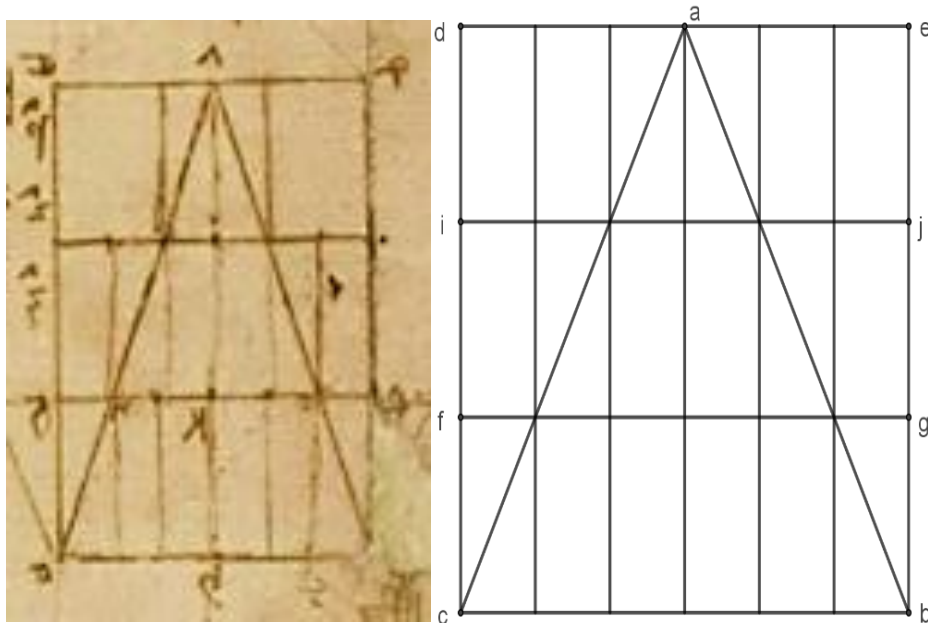
A essa altura o leitor deste texto pode estar se perguntando sobre o desenho B da folha 100r que está ao lado das três afirmações que acabamos de discutir. Não o mencionamos anteriormente pelo fato de que tal desenho não é mobilizado por Leonardo da Vinci nas afirmações discutidas o que só é feito por ele no quarto momento no qual sintetiza o conteúdo das afirmações e as relaciona com o desenho B . Assim, retomaremos o desenho para fazer a discussão do trecho de anotações mencionado.

Para melhor interpretar o desenho, fizemos um modelo que expressa com clareza as ideias do desenho de Leonardo da Vinci tendo vista que, por se tratar de um desenho do século XV, possui algumas partes apagadas. As letras a, b, c, d, e, f e g representam pontos e estão na forma minúscula por ser assim que Leonardo da Vinci as utilizou em seus desenhos, mas no texto usaremos a notação atual para evitar confundi-las com o texto em si.

Incluímos i e j para que a interpretação e a explicação, que faremos a partir do texto de Leonardo da Vinci, sejam mais claras. Esse desenho que chamamos de modelo, e auxiliou na interpretação do desenho e na definição do objeto a que ele se refere, faz parte e exemplifica a materialização da regra interpretativa necessária para

o entendimento do contexto de referência do desenho e das anotações a ele relacionadas.

Figura 41: Triângulo inscrito no retângulo



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008b, p. 71).

É possível observar que para cada enunciado feito, Leonardo da Vinci expressa uma consequência e a relaciona com o desenho, dessa forma, o desenho é a parte geométrica que compõe essa tentativa de demonstração ou verificação das definições e proposições de *Os elementos* de Euclides mencionadas anteriormente.

A partir do desenho identificamos que o retângulo é a seção de um cilindro e de um prisma quadrangular. Já o triângulo é a seção de uma pirâmide, cuja base coincide com a base do prisma, e de um cone cuja base coincide com a base de cilindro. Portanto, Leonardo da Vinci tenta demonstrar graficamente as proposições referidas por meio de uma superfície plana, ou seja, por meio das seções da pirâmide, do prisma, do cilindro e do cone.

A partir do desenho é possível constatar que Leonardo da Vinci dividiu o retângulo maior $DEBC$ em três retângulos menores $FGBC$, $IJGF$ e $DEJI$ e cada um destes em 6 retângulos menores que tomaremos como uma unidade de área ($1u.a.$), ou seja, cada um dos três retângulos, como $FGBC$ por exemplo, tem área $6u.a.$ e o retângulo $DEBC$ tem área $18u.a.$ É possível constatar, ainda, que os dois lados do triângulo ABC diferentes da base passam sobre as diagonais dos retângulos que

tomamos como $1u. a.$ por isso tais diagonais dividem estes em duas partes de $\frac{1}{2}u. a.$, cada um. Assim, é possível estabelecer a relação entre as áreas do triângulo ABC e do retângulo $DEBC$.

Observamos o desenho, partindo da base \overline{CB} do retângulo. No retângulo $FGBC$, podemos identificar que o triângulo ABC ocupa $5u. a.$ ($4u. a.$ mais duas metades $1u. a.$). No retângulo $IJGF$ o triângulo ocupa $2u. a.$ mais duas metades $1u. a.$ que totaliza $3u. a.$ e no retângulo $DEJI$, ABC ocupa duas metades do retângulo tomado como unidade de área, totalizando $1u. a.$ Portanto, o triângulo ABC ocupa, no total, $9u. a.$ que corresponde à metade da área total do retângulo $DEBC$ que é de $18u. a.$

Vamos verificar, agora, a correlação da nossa interpretação com o que Leonardo da Vinci fez na folha 100r. Em sua conclusão, ele registra:

Pela primeira, a pirâmide $a b c$ é um terço de todo o seu cilindro $d e b c$; pela segunda, $f g b c$, terça parte do cilindro, é igual à referida pirâmide, por ser um terço de todo o cilindro; e pela terceira, três vezes a altura do corpo retangular $f g b c$, mede a altura da pirâmide $a b c$, igual a esse corpo (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 208)²⁰.

A primeira parte na qual Leonardo da Vinci registra que a pirâmide ABC é $\frac{1}{3}$ do cilindro $DEBC$ não converge com nossa interpretação, pois nela ABC tem $9u. a.$ e $DEBC$, $18u. a.$, ou seja, ABC é $\frac{1}{2}$ de $DEBC$. Em seguida, ele registra que o retângulo $FGBC$ é a terça parte do cilindro $DEBC$, o que converge com o que fizemos, pois $FGBC$ mede $6u. a.$ e $DEBC$ $18u. a.$ Na terceira parte da conclusão, Leonardo da Vinci registra que a altura da pirâmide ABC é o triplo da altura de $FGBC$, o que é provado pelo desenho, mas afirma também que ABC é igual a $FGBC$ o que não converge com nossa interpretação na qual ABC tem $9u. a.$ e $FGBC$ $6u. a.$

As convergências e divergências entre a interpretação dos desenhos de Leonardo da Vinci e aquilo que está na folha registrado por ele, não têm a intenção de apontar falhas no seu trabalho ou minimizar sua importância, pois temos que considerar que Leonardo da Vinci viveu nos séculos XV e XVI, portanto em outra época, com outra cultura e organização social e com outra matemática em circulação,

²⁰ Per la prima seguita che la piramide $a b c$ è un terzo di tutto il suo cilindro $d e b c$; e per la seconda $f g b c$, terza parte del cilindro, è pari alla detta piramide, per esser lei un terzo di tutto il cilindro. E per la terza tre volte l'alteza del corpo rettangolo $f g b c$ misura la piramide $a b c$, eguale a esso corpo.

ou seja, em condições de vida que não são as mesmas da contemporaneidade. Além disso, temos que levar em consideração os seus objetivos em fazer esses estudos.

Dessa forma, entendemos que as convergências e divergências apontadas, são elementos que enriquecem a discussão proposta e podem ser utilizadas na elaboração de atividades de ensino ou em discussões durante as aulas de geometria sobre o processo de desenvolvimento histórico e epistemológico desse corpo de conhecimentos, o que consideramos ser uma discussão potente em relação à apresentação dos objetos geométricos de forma isolada e descontextualizada (sem correlações com o contexto histórico e epistemológico, principalmente).

O que queremos enfatizar é o procedimento que Leonardo da Vinci segue, principalmente nessa parte específica da folha (parte 2) na qual ele consegue completar uma linha de raciocínio, pois ele define uma base teórica (*Os elementos*), anuncia o que vai tomar como válido, que são as três afirmações (primeira, segunda e terceira), e constrói a prova por meio de argumentos escritos e de um desenho que se relaciona com tais argumentos elaborados a partir do que ele tem como válido. A importância de tal procedimento está nas semelhanças que tem com a construção da própria matemática, por exemplo, a geometria de *Os elementos*, a qual parte de algo que já é válido (definições, postulados e noções comuns) para anunciar e provar as proposições (MARTINS, 2020).

Outro aspecto importante que destacamos são as incoerências ou divergências percebidas na demonstração de Leonardo da Vinci quando ele utiliza figuras planas (seções dos sólidos), por exemplo, para provar algo relacionado a sólidos geométricos e chega a resultados que não provam totalmente o que ele pretendia. Novamente, um aspecto que pode ser relacionado ao desenvolvimento da geometria, visto que, esse corpo de conhecimento sólido e reconhecido na atualidade, passou por muita experimentação, tentativas e erros, até chegar ao formato atual. O que queremos dizer é que tentativas, acertos e erros foram (e são) fatores primordiais para o desenvolvimento da geometria, e da matemática em geral, inclusive responsáveis por gerar uma parte significativa da matemática de forma não intencional, mas como resultado de tentativas de solução de problemas matemáticos como os famosos problemas da Antiguidade grega cujas tentativas de solução se estenderam por 2000 anos e geraram conhecimentos matemáticos como aqueles relacionados às cônicas, por exemplo.

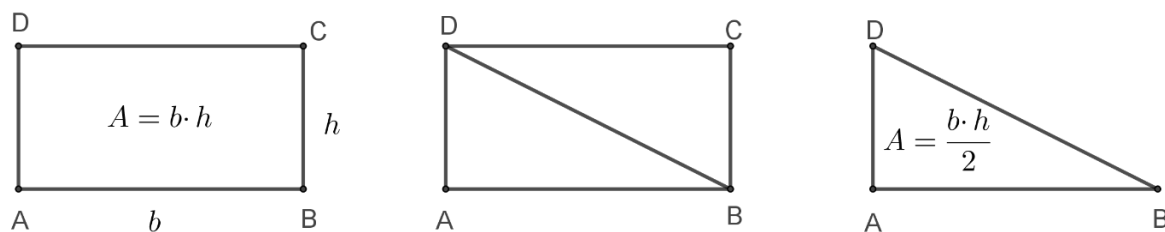
Essa conclusão a que chegamos, poderá ser tema de discussão entre os estudantes da Educação Básica, mais precisamente do Ensino Médio já que esse assunto, geralmente, faz parte daqueles a serem ensinados nesse nível. A discussão a que nos referimos, disparada pelos desenhos de Leonardo da Vinci que refletem uma matemática histórica, poderá ter como mediadora a relação entre a geometria euclidiana de *Os elementos* e a geometria escolar do livro didático de matemática. Isso poderá fazer com que os estudantes compreendam as origens históricas da geometria que estudam na Educação Básica e passem a ter uma visão mais completa dessa geometria que não estará mais isolada (no livro didático) do seu contexto histórico e epistemológico (MARTINS, 2020).

Outra relação que pode ser estabelecida entre o desenho B da folha 100r (figura 37) e a geometria da Educação Básica, diz respeito às fórmulas utilizadas para medir a área do retângulo e do triângulo. Anteriormente, deduzimos do desenho B que o triângulo ABC ocupa, no total, $9u.a.$ que corresponde à metade da área total do retângulo $DEBC$ que é de $18u.a.$ Essa relação é a mesma que se encontra nos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental e, portanto, faz parte dos temas geometria a serem ensinados aos estudantes desse nível. No 6º ano é prevista a medição de áreas do triângulo e do retângulo e no do 7º ano, além da medição das áreas preconiza-se a relação de equivalência entre elas, pois pretende-se que o estudante seja capaz de “Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas” (BRASIL, 2017, p. 307).

A demonstração contida em livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, como por exemplo em Dante (2015), consiste em determinar a área do triângulo a partir da área do retângulo definida preliminarmente. Vejamos um exemplo de como essa demonstração é apresentada nos livros didáticos desse nível.

Considere o retângulo $ABCD$ cuja base \overline{AB} mede b e altura \overline{CD} mede h . Sabe-se que a área do retângulo pode ser calculada por meio do produto de b por h ($A = b \cdot h$). Porém, se for traçada uma das diagonais do retângulo \overline{DB} identifica-se, que a partir dessa diagonal serão formados dois triângulos, DAB e BCD . Ocorre que cada triângulo formado a partir da diagonal, equivale à metade da área do retângulo, ou seja, a área de cada triângulo é o produto $b \cdot h$ dividido por 2 como mostra o triângulo DAB da figura 42.

Figura 42: Relação entre área do triângulo e do retângulo

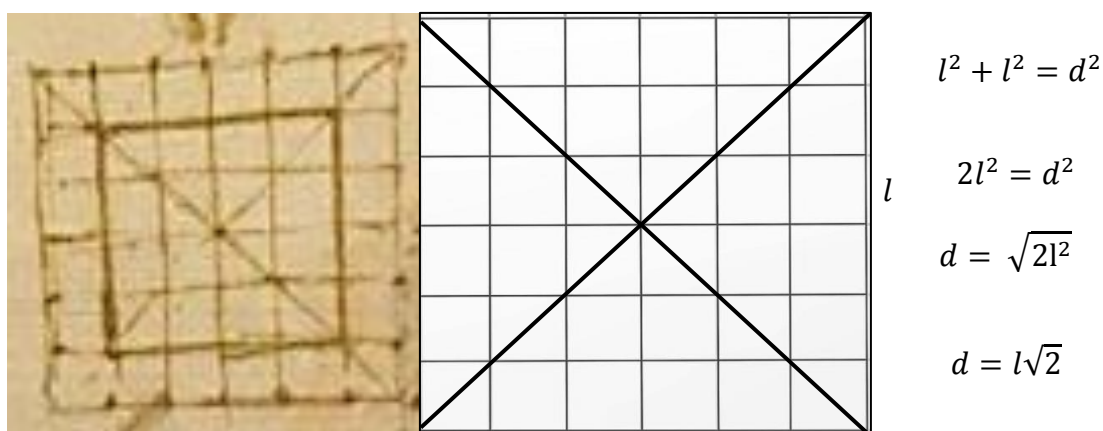


Fonte: Elaborado pelos autores.

Portanto, a demonstração anterior contém elementos que possibilitam relacionar a geometria refletida na folha 100r do Códice Atlântico aos objetos da geometria escolar, como por exemplo, a medição e relação entre áreas do retângulo e do triângulo que são objetos de estudo do 7º ano do Ensino Fundamental.

Passemos ao estudo do desenho D que está na parte 4 da folha 100r (figura 37). O quadrado que estudaremos (figura 43) foi dividido em 36 quadrados pequenos com o número 36 acima escrito ao contrário, como já se sabe da escrita de Leonardo da Vinci. O fato de o quadrado maior ser composto por 36 quadrados pequenos pode ser relacionado à obtenção da fórmula para cálculo de área do mesmo, pois a base do quadrado é composta por seis quadrados, assim como a altura e o produto da base pela altura é $6 \times 6 = 36$ que é exatamente o número total de quadrados que corresponde a área do quadrado. Assim, cada quadrado menor seria uma unidade de área 1u.a. como pode-se constatar na figura 43.

Figura 43: Desenho D da folha 100r



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008b, p. 71).

Para que se compreenda a relação que estabelecemos, colocamos o desenho de Leonardo da Vinci novamente ao lado de um esquema que possibilita o estabelecimento de relações com os temas de geometria da Educação Básica. O método que foi utilizado por Leonardo da Vinci ao dividir o quadrado em quadrados menores, é o mesmo utilizado no ensino de geometria da Educação Básica e que está retratado no quadrado da direita, pois como se sabe, a fórmula para cálculo da área do quadrado é o produto da base pela altura $A = b \cdot h$ e como em um quadrado a base tem mesma medida da altura, a fórmula pode se $A = l^2$, sendo l o lado do quadrado. Dessa forma, o desenho de Da Vinci pode ser relacionado ao estudo de área do quadrado que se dá no Ensino Fundamental maior, 6º ao 9º, anos (BRASIL, 2017).

Além da medição de área, o desenho em discussão remete a outra relação contida no estudo do quadrado que é aquela entre o lado e a diagonal (já evidenciada neste texto) que aliás é um tema recorrente nos desenhos de Leonardo da Vinci contidos no Códice Atlântico e em outros manuscritos seus como o Códice Windsor. Essa relação é tema de estudo no 1º ano do Ensino Médio, quando se estuda a geometria plana e no 2º ano no estudo de prismas, uma vez que a diagonal de um prisma de base quadrada é obtida a partir da diagonal da sua base. A relação é feita por meio do teorema de Pitágoras, pois a diagonal do quadrado determina dois triângulos retângulo cuja hipotenusa é d e os catetos têm medida a .

Observe (na figura 43) que o desenho original possui o traçado das duas diagonais do quadrado, de forma semelhante ao que fizemos. Com a aplicação do teorema de Pitágoras, chegamos à relação entre lado e diagonal. Como o quadrado de Leonardo da Vinci tem lado 6 ($a = 6$), podemos calcular a medida da sua diagonal que seria $d = 6\sqrt{2}$.

Dessa forma, o desenho contido na folha 100r do Códice Atlântico, contém elementos que remetem à geometria da Educação Básica, pois tratam de temas que foram estudados por Leonardo da Vinci (nos séculos XV e XVI) e continuam a ser tema de estudos atualmente na sala de aula de matemática da Educação Básica. Isso reflete o potencial desses desenhos para o ensino de geometria e a possibilidade de sua utilização para a elaboração de atividade de ensino de geometria.

A geometria plana refletida na folha 100r remete aos temas de geometria ensinados na Educação Básica dentre os quais destacamos: prisma, pirâmide, cilindro

e cone, triângulo, retângulo, quadrado, medição de áreas, e outros como duplicação do quadrado e a relação entre volumes, triângulo retângulo e teorema de Pitágoras. São temas que fazem parte da geometria do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e Ensino Médio.

Apoiados nos documentos curriculares oficiais e em nosso estudo, defendemos a ideia de que o estudo da geometria na Educação Básica não pode ser reduzido a aplicação das fórmulas de cálculo de área e volume, por exemplo. Outros recursos como a problematização e investigação de temas como a equivalência de áreas, praticada há milhares de anos por povos como os gregos antigos e mesopotâmios, poderão ser mobilizados para o ensino. As problematizações mencionadas poderão ter como base o estudo de folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci como a folha 100r.

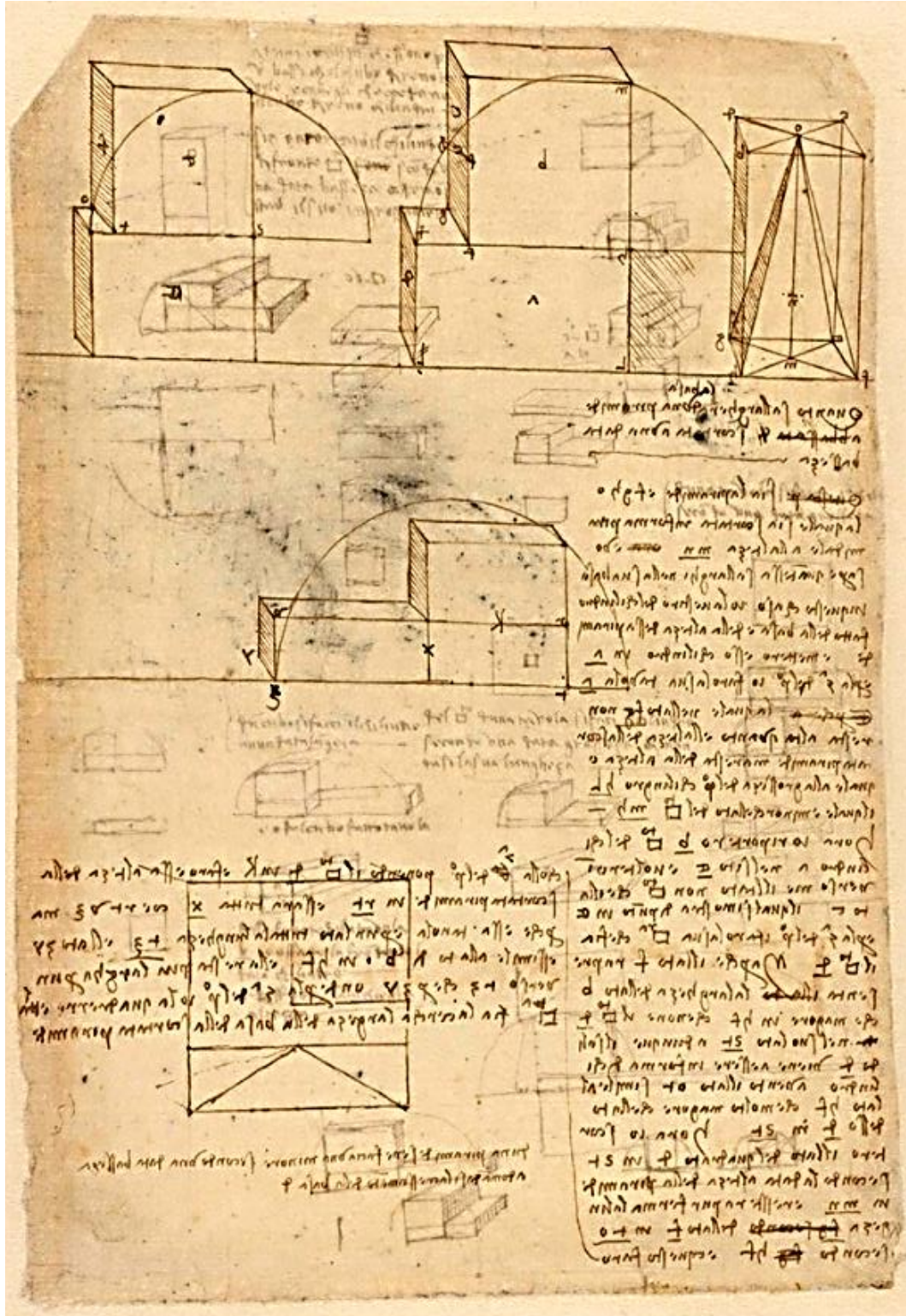
Dessa forma, o estudo dos temas de geometria que fazem parte do currículo da Educação Básica poderão ser ensinados por meio de desenhos contidos em manuscritos antigos como o Códice Atlântico, pois tais desenhos, mesmo não tendo sido feitos ou pensados para esse fim, têm em sua constituição, elementos que remetem ou refletem a geometria desse nível de ensino. A exemplo disso, a demonstração da relação entre volume da pirâmide e do prisma e o procedimento de Leonardo da Vinci, poderão ser discutidos nas aulas e levar o estudante a desenvolver a habilidade de argumentar logicamente e propor ideias, a partir de algo já provado e encadeá-las com foco na prova pretendida, que é uma mostra do funcionamento da matemática com ciência que pode ser objeto estudo no Ensino Médio.

Assim, tanto o processo de demonstração quanto o estabelecimento de relações entre os sólidos que discutimos, poderá desenvolver nos estudantes do Ensino Médio habilidades e raciocínio mais complexos comparados aqueles desenvolvidos na atividade de conhecer os sólidos separadamente e ser informado sobre a existência do teorema, somente (que também é necessário). Isso caracteriza o aprofundamento das ideias sobre geometria adquiridas no Ensino Fundamental e, portanto, a ampliação dos conhecimentos adquiridos pelo estudante o que poderá contribuir para que ele, diante de uma situação problema, tenha a sua disposição, um leque de possibilidades que lhe permita selecionar a melhor e mais eficiente para tal solução.

O tema da folha 100r é retomado em outras folhas do Códice Atlântico por Leonardo da Vinci. Porém, a demonstração que ele constrói, utiliza os sólidos e não

as suas secções como ocorreu na folha 100r. É possível que ele tenha aprimorado o método a partir do aprofundamento nos estudos sobre o assunto. Um exemplo desse aprimoramento pode ser identificado na folha 529r (figura 44).

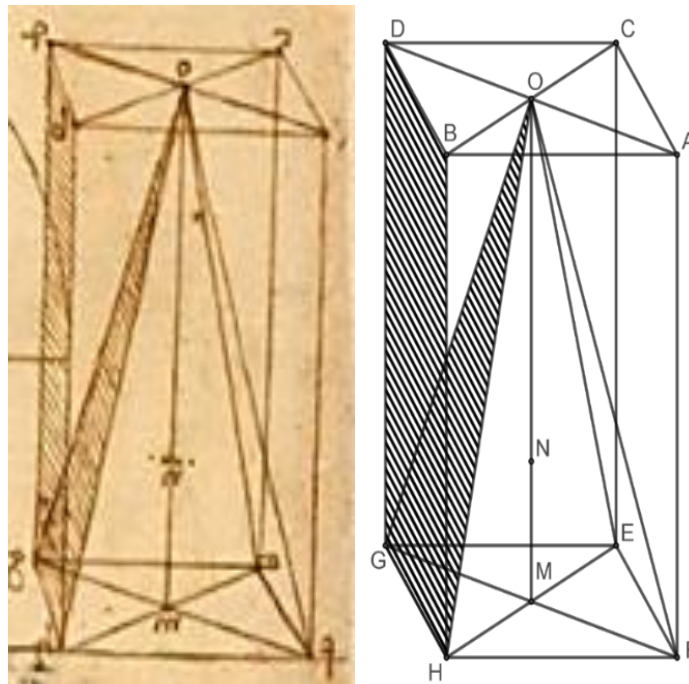
Figura 44: Folha 529r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008i, p. 107).

Na folha há cinco desenhos que se destacam. Na parte superior, da esquerda para a direita, temos dois desenhos semelhantes que consistem em blocos (paralelepípedos) que se sobrepõem em um esquema que contém um arco de círculo. Junto a margem direita, uma pirâmide inscrita em um paralelepípedo retângulo. No centro da folha repete-se o esquema de cima e na parte de baixo encontra-se um retângulo cuja superfície foi subdividida em retângulos e triângulos. Nessa folha Da Vinci se propõe a resolver um problema: quanto será ampliada a base de uma pirâmide diminuindo sua altura em dada medida? Que trata da transformação de uma pirâmide em outra de mesmo volume, a partir de alterações em sua altura e aresta da base (rataremos desse problema a seguir). Inicialmente, tratemos da relação entre o volume da pirâmide e do prisma que se pode observar isolando-se o desenho em destaque na figura 45.

Figura 45: Pirâmide inscrita no paralelepípedo retângulo



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008i, p. 107).

No desenho, Leonardo da Vinci retratou uma pirâmide inscrita em um prisma de base quadrangular. A base inferior da pirâmide é o quadrilátero $EFGH$ que coincide com a base do prisma, cujo centro m é o ponto de intersecção das diagonais (FG e HE) do quadrilátero. A base superior do prisma é o polígono $ABCD$, cujo centro o é o vértice da pirâmide que é obtido por procedimento análogo ao da base. Do teorema de Euclides mencionado anteriormente, podemos afirmar que a pirâmide

$EFGHO$ tem volume igual à terça parte do volume do prisma no qual está inscrita, visto que suas bases são congruentes e possuem mesma altura MO

Em *Os elementos*, a demonstração, dessa relação é feita a partir de um desenho que retrata um prisma de base triangular que é seccionado de forma a originar as três pirâmides de mesmo volume. A demonstração já foi discutida anteriormente (figura 40), por isso não nos deteremos a ela. Essa demonstração é encontrada em alguns livros didáticos de matemática do Ensino Médio na Educação Básica, o que possibilita a discussão dos desenhos de Leonardo da Vinci nas aulas que tratem da relação em discussão.

A relação retratada na figura 45 poderá ser tema de discussão entre os estudantes da Educação Básica, mais precisamente do Ensino Médio já que esse assunto, geralmente, faz parte daqueles a serem ensinados nesse nível. A discussão a que nos referimos, disparada pelos desenhos de Leonardo da Vinci, poderá ter como mediadora a relação entre a geometria euclidiana de *Os elementos* e a geometria escolar do livro didático de matemática, a exemplo do que fizemos na demonstração anterior. Isso poderá fazer com que os estudantes compreendam as origens históricas da geometria que estudam na escola e passem a ter uma visão mais completa dessa geometria que não estará mais isolada (no livro didático) do seu contexto histórico.

Por sua vez, a demonstração da relação entre volume da pirâmide e do prisma que discutimos, poderá ser problematizada em sala de aula de modo a tematizar o modo de se proceder em uma prova matemática, tema pouco discutido na Educação Básica. O encadeamento de ideias que compõe uma prova matemática, poderá levar o estudante a desenvolver habilidades de argumentação lógica e de proposição de ideias, a partir de algo já provado.

E quanto ao problema proposto por Leonardo da Vinci na folha 529r que está em estudo? O problema é: quanto será ampliada a base de uma pirâmide diminuindo sua altura em dada medida? Que pode ser reinterpretado da seguinte maneira: considere uma pirâmide P_1 de base quadrada, aresta da base a_1 , altura h_1 e volume V_1 e uma pirâmide P_2 de base quadrada, aresta da base a_2 altura h_2 e volume V_2 . Qual será a relação entre as arestas a_1 e a_2 (ou entre as áreas das bases) de forma que haja uma redução na altura ($h_2 < h_1$) mas que se mantenha o volume, ou seja, $V_1 = V_2$?

Sabemos que o volume da pirâmide é determinado pela relação $V_p = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$. Como a base é um quadrado $S_b = l^2$. Assim, $V_p = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h$. Vamos ver o que acontece se dividirmos a altura por 3, ou seja, se $h_2 = \frac{h_1}{3}$. Teremos que: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot h_1$ e $V_2 = \frac{1}{3} \cdot l_2^2 \cdot \frac{h_1}{3}$, mas $V_1 = V_2$, então, $\frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot l_2^2 \cdot \frac{h_1}{3}$. Cancelamos os termos iguais nos dois membros da equação, teremos: $l_1^2 = l_2^2 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow l_2^2 = 3l_1^2$. Se extrairmos a raiz quadrada dos dois membros da equação, obteremos $l_2 = l_1 \sqrt{3}$. Portanto, se a altura de uma pirâmide for reduzida a terça parte da altura inicial, para manter seu volume, a aresta da base terá que ser multiplicada por $\sqrt{3}$. Isso vai triplicar a área do quadrado que está na base. Vejamos!

$S_1 = l_1^2$ e $S_2 = l_2^2$, mas $l_2 = l_1 \sqrt{3}$. Então teremos que $S_2 = (l_1 \sqrt{3})^2$. Fazendo-se as operações necessárias, $S_2 = 3l_1^2$. Como $S_1 = l_1^2$, $S_2 = 3S_1$. Então, se a altura de uma pirâmide for reduzida a $\frac{1}{3}$ da altura inicial, sua base terá que ser triplicada, pois o volume é diretamente proporcional ao produto da área da base pela altura. Mas para isso acontecer, a aresta da base terá que ser multiplicada pela $\sqrt{3}$.

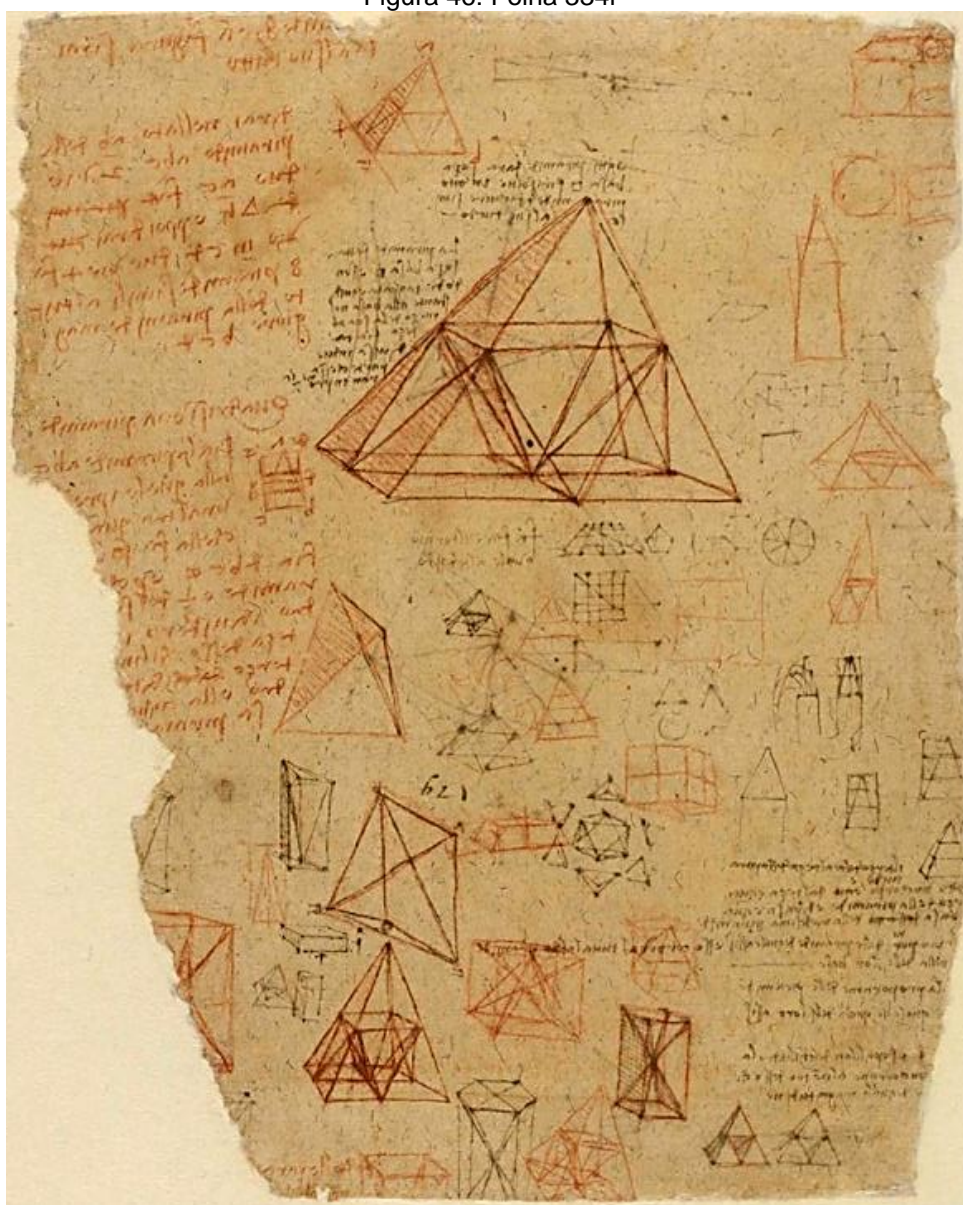
No que se refere à Educação Básica, o estudo dos sólidos geométricos, particularmente das pirâmides está previsto nos anos 3º, 4º, 5º e 6º do Ensino Fundamental e no 2º ano do Ensino Médio, no qual estuda-se elementos da pirâmide, planificação, seção transversal, área, volume e tronco de uma pirâmide (BRASIL, 2007, 2017).

Outro estudo de Da Vinci sobre esse objeto da geometria trata da decomposição da pirâmide, que ocorre quando uma pirâmide é subdividida em pirâmides submúltiplas. No Códice Atlântico, há pelo menos, duas situações nas quais Da Vinci apresenta uma decomposição, que se refere à determinação do centro de gravidade da pirâmide, cuja busca fez com que ele desenvolvesse essa técnica e outra que se refere à transformação de sólidos geométricos em outros de igual volume. Ambas refletem sua incessante busca por conhecer e aprofundar cada vez mais seus estudos de forma a estabelecer múltiplas relações mediadas pela fermenta que era de seu domínio, o desenho, já que Leonardo da Vinci foi um artista sem igual.

Valendo-se tanto da observação quanto do raciocínio matemático, e combinando o estudo de formas geométricas, às investigações sobre o voo dos pássaros, Leonardo se tornou o primeiro a descobrir o centro de gravidade de uma pirâmide triangular, (que fica a um quarto da altura em uma linha partindo da base até o topo (ISAACSON, 2017, p. 230).

A exemplo de Leonardo da Vinci, estabelecer relações entre os seus desenhos e a geometria da Educação Básica é um dos focos do presente estudo, pois tais relações evidenciarão o seu potencial conceitual que, no caso da decomposição da pirâmide, será destacado pelo estudo da folha 334r do volume 6 do Códice (figura 46).

Figura 46: Folha 334r



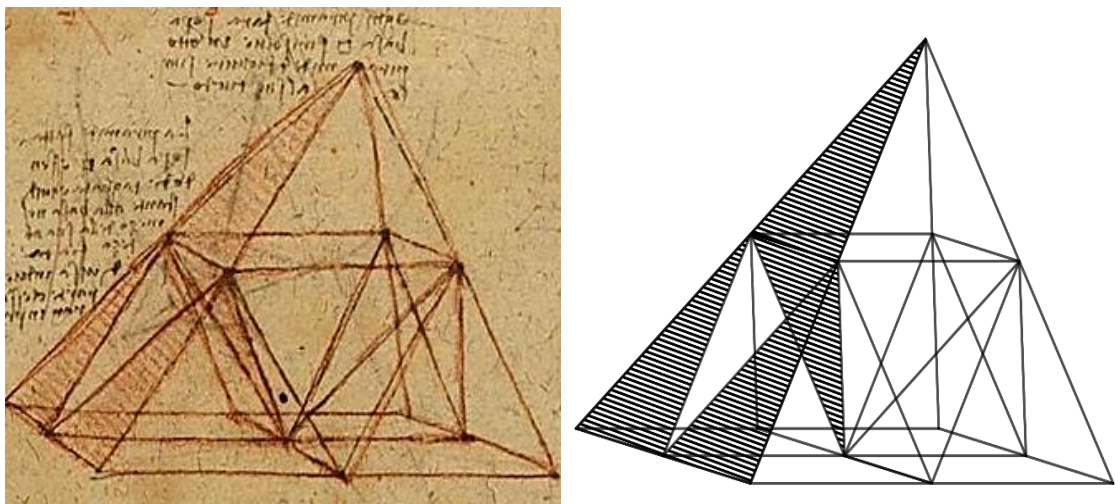
Fonte: Sánchez e Almarza (2008f, p. 39).

A folha em estudo, tem alguns desenhos de pirâmides (pelo menos nove) que têm relação com a decomposição da pirâmide maior. Alguns desenhos que estão na

parte inferior, mostram a relação volumétrica entre pirâmide e prisma. Há desenhos de pirâmides inscritas em um cubo, em outro prisma de base retangular e em um prisma de base hexagonal, este último inclusive, tem a base superior subdividida nos seis triângulos equiláteros que compõem o hexágono. Esses desenhos devem ser tentativas de Leonardo da Vinci em resolver o problema da decomposição da pirâmide já o relacionando com as relações volumétricas entre pirâmide e prisma.

O desenho maior que está no centro da folha (metade superior) destaca a decomposição da pirâmide maior em 10 pirâmides menores, sendo 6 pirâmides semelhantes a pirâmide maior e 4 pirâmides triangulares, ou seja, 4 tetraedros regulares. A pirâmide maior é seccionada horizontalmente, a certa altura da base, e seccionada por planos oblíquos à base. A seção horizontal irá originar uma pirâmide que é a parte superior à seção, e um tronco de pirâmide inferior à seção. Esse tronco foi subdividido em cinco pirâmides de base retangular e quatro pirâmides triangulares que são os tetraedros, já mencionados. Veja a pirâmide subdividida na figura 47 e as pirâmides originadas da subdivisão na sequência.

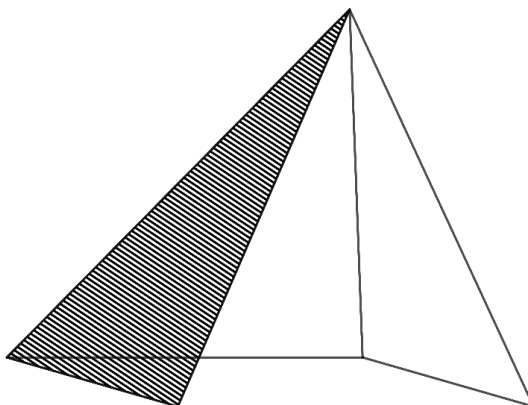
Figura 47: Pirâmide subdividida



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008f, p. 39).

A observação da figura completa poderá dificultar o entendimento o que descrevemos, para o leitor, por isso, detalhamos a decomposição feita para que o entendimento seja o melhor possível. A figura 48 destaca a pirâmide superior originada pela seção horizontal. Essa pirâmide é semelhante à primeira, ou seja, é possível que se estabeleçam relações de proporcionalidades entra suas medidas (altura, arestas, apótemas etc.).

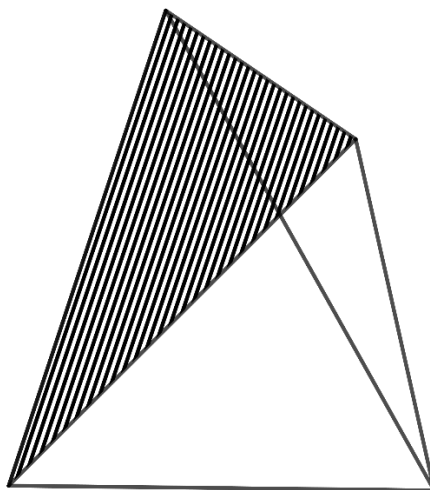
Figura 48: Pirâmide originada pela decomposição



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008f, p. 39).

A observação do tronco, possibilitou a identificação das outras 9 pirâmides mencionadas: 5 pirâmides de base retangular, semelhantes àquela da parte superior e à pirâmide maior (figura 48), e as quatro triangulares, cujo desenho foi destacado por Leonardo da Vinci, logo abaixo da pirâmide maior, o que pode ser constatado pela observação da folha 334r, completa. Esse tetraedro foi feito por nós e encontra-se na figura 49.

Figura 49: Tetraedro originado pela decomposição da pirâmide



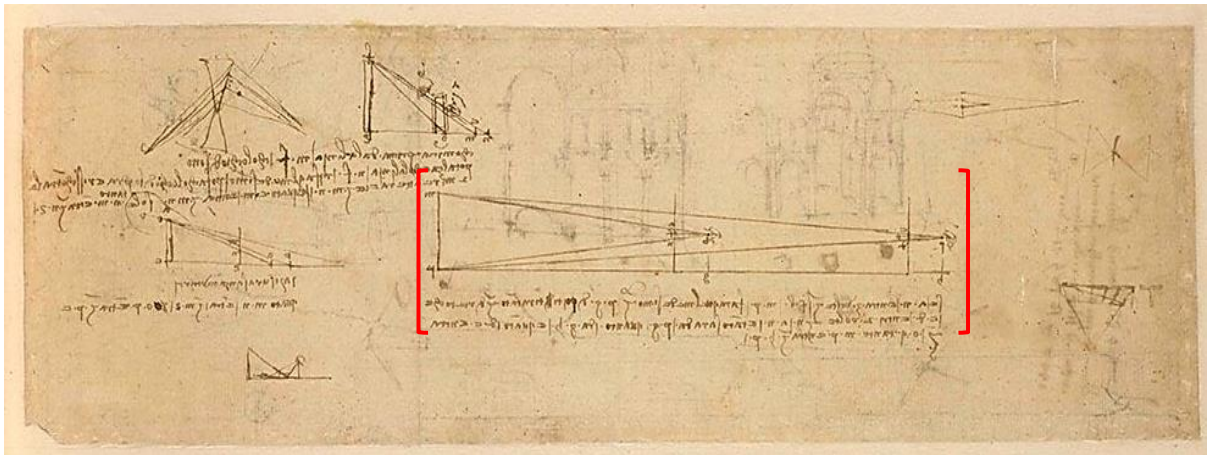
Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008f, p. 39).

Em síntese, a pirâmide maior foi subdividida em 10 pirâmides submúltiplos, das quais seis são quadrangulares e 4 triangulares. Partindo do princípio de que a soma dos volumes das pirâmides submúltiplos resulta no volume da pirâmide maior, é possível relacionar esses volumes entre si e eles com a pirâmide maior. A decomposição da pirâmide feita por Da Vinci, é mais um tema que pode ser objeto de

discussão nas aulas de matemática do Ensino Médio (como já mencionamos) e isso poderá favorecer a aprendizagem dos alunos e o estabelecimento de relações dos objetos da geometria dentro do próprio contexto geométrico.

Outro tema que faz parte dos estudos de Leonardo da Vinci contidos nas folhas do Códice Atlântico é a *geometria projetiva* por meio de seus estudos sobre perspectiva, tema tratado na folha 119r, que está no volume 2 da coleção estudada (figura 50). Ela contém 3 blocos de texto e um grupo de desenhos (8 pelo menos) nos quais predomina a forma triangular.

Figura 50: Folha 119r. Estudo da perspectiva geométrica



Fonte: Sánchez e Almarza (2008b, p. 111).

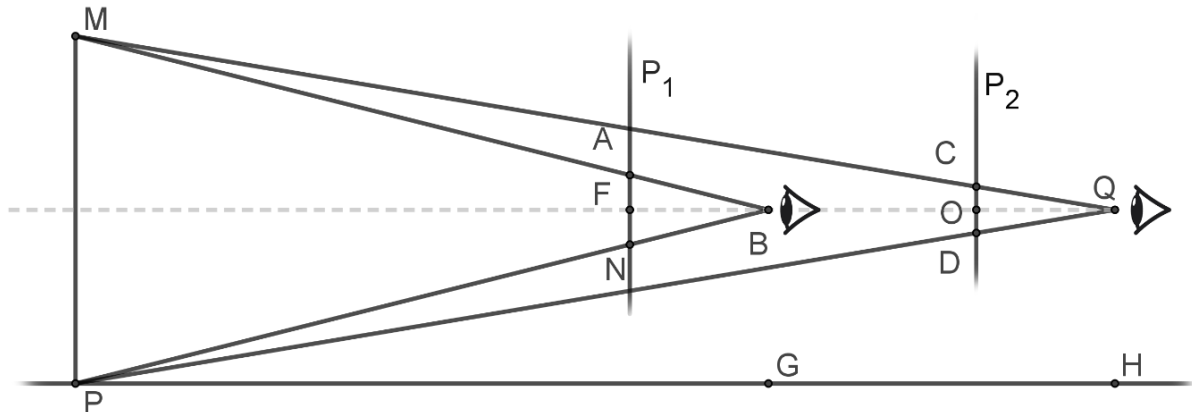
O tema central da folha é a perspectiva, melhor compreendida por meio do desenho maior (ao centro, destacado por nós pelos colchetes em vermelho) a partir do qual Da Vinci discute o princípio da proporcionalidade entre triângulos semelhantes. O desenho em destaque retrata dois observadores em posições distintas, a partir das quais olham um objeto que está a uma certa distância para obter as suas dimensões no plano de sua representação, ou seja, na tela ou parede a ser pintada.

Para estabelecer as relações entre as partes que compõem o desenho, Da Vinci identifica-o por meio de pontos, quais sejam, $mp - afn - bg - cd - qh$ ²¹, os quais colocamos na figura 51, feita a partir do desenho de Da Vinci, para auxiliar na sua interpretação. Os observadores, representados pelo olho, estão nas posições B e Q e a medida “real” do objeto em estudo foi representado pelo segmento MP . Entre

²¹ Já mencionamos que Leonardo da Vinci, geralmente, identifica os pontos por letras minúsculas e que as identificamos, nas figuras refeitas, por letras maiúsculas, conforme notação atual.

o objeto MP e o observador B há o plano P_1 e entre MP e o observador Q há o plano P_2 . Esses planos verticais P_1 e P_2 caracterizam a superfície na qual o objeto será representado, ou seja, a superfície a ser pintada.

Figura 51: Desenho central da folha 119r



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008b, p. 111).

O estudo de Leonardo da Vinci se baseia em 4 triângulos MQP , MBP , ABN e CQD todos isósceles e semelhantes. Os lados dos triângulos são os segmentos de reta que unem os pontos extremos do objeto ao olho do observador; suas bases são: a medida do objeto observado e os planos de intersecção e, suas alturas estão sobre a reta que passa pelos vértices dos triângulos. Tomando como exemplo o triângulo ABN teremos: *lados*, AB e NB ; *base*, NA ; *altura*, FB .

A proporcionalidade estabelecida por Da Vinci nesse caso foi entre as bases e as alturas dos triângulos, pois o esquema descrito nos leva a inferir que sua principal função é estabelecer relações entre a distância, do observador ao quadro, e as dimensões do objeto a ser representado. No texto abaixo do desenho Leonardo da Vinci faz a seguinte anotação “Se $a n$ estiver contido 3 vezes em $f b$, $m p$ fará o mesmo em $p g$. De forma indireta isso implica que $c d$ está contido 2 vezes em $a n$; e da mesma forma será com $p g$ e $g h$. E o quanto $d c$ estiver contido em $o q$, tanto $m p$ estará em $h p$ ”²² (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008b, p. 237).

Seguindo a mesma ordem do texto de Da Vinci identificamos três relações de proporcionalidade entre os segmentos: a primeira entre AN , FB , MP e PG ; a segunda

²² Se $a n$ entra 3 volte in $f b$, $m p$ farà quel medesimo in $p g$. Di poi ti tira tanto indiriecto che $c d$ entri 2 volti in $a n$; e tanto sarà da $p g$, quanto da $g h$. E quanto $d c$ entra in $o q$, tanto $m p$ entra in $h p$;

entre CD , AN , GH e PG ; e a terceira entre DC , OQ , MP e HP , as quais organizamos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bullet \quad AN &= \frac{1}{3} FB \rightarrow MP = \frac{1}{3} PG \rightarrow \frac{AN}{FB} = \frac{MP}{PG} \\ \bullet \quad CD &= \frac{1}{2} AN \rightarrow GH = \frac{1}{2} PG \rightarrow \frac{CD}{AN} = \frac{GH}{PG} \\ \bullet \quad \frac{DC}{OQ} &= \frac{MP}{HP} \rightarrow \dots \dots \dots \rightarrow \frac{DC}{OQ} = \frac{MP}{HP} \end{aligned}$$

A primeira proporcionalidade é estabelecida entre base e altura dos triângulos MBP e ABN , ou seja, relacionam: a medida “real” do objeto e a medida de sua representação no plano 2 com as distâncias, do observador ao objeto e do observador ao plano 2; a segunda, relaciona as dimensões do objeto em cada plano de representação às distâncias, do observador 1 ao observador 2 e do observador 2 ao objeto a ser representado; por fim, a terceira proporcionalidade, entre base e altura dos triângulo MQP e CQD , relaciona a medida “real” do objeto e a medida de sua representação no plano 1 com as distâncias, do observador ao objeto e do observador ao plano 1;

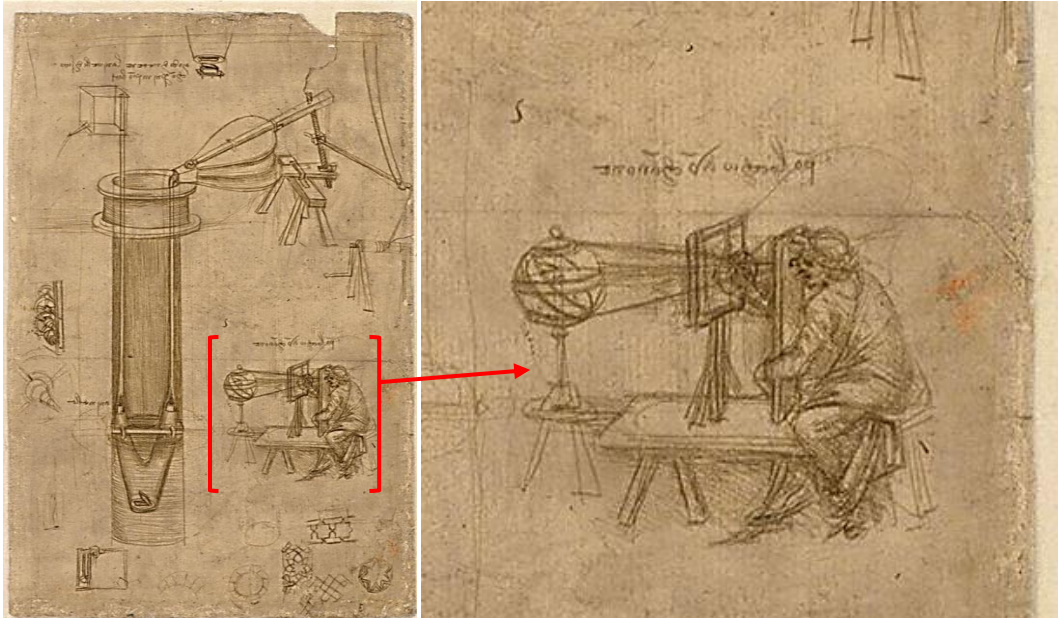
A partir das relações de proporcionalidades estabelecidas seria possível, então. Aplicá-las a situações práticas, ou seja, na representação de objetos por meio da pintura e desenho (principalmente) que, por meio da perspectiva, poderiam representar objetos tridimensionais no plano bidimensional. Assim, a pintura atendia a exigência de representação do real que foi característica da arte renascentista, como já discutimos na parte I deste trabalho. Para exemplificar a operacionalização do esquema discutido, tomaremos a folha 5r (figura 52).

A folha contém alguns desenhos e, dentre eles, um que retrata um artista trabalhando segundo as relações estabelecidas na folha 119r. No desenho em destaque uma pessoa segura com o braço esquerdo uma estrutura retangular, olha por um furo que há nessa estrutura e, com a mão direita, desenha em uma tela (que julgamos ser de material transparente), uma esfera armilar, um instrumento de astronomia conhecido desde a Antiguidade, que era utilizado nas navegações.

O desenho mostra o observador, o plano de representação (no qual ele desenha) e o objeto a ser representado que no plano tem suas dimensões menores que o tamanho real, como foi estabelecido pelas proporcionalidades na folha 119r.

Além disso, é um desenho que fala sobre o ato de desenhar em perspectiva e para confirmar a utilização dessa técnica, foi feito em perspectiva, pois está em 3ª dimensão, o que ilustra a perspectiva em ação.

Figura 52: Folha 5r. Desenhando uma esfera armilar



Fonte: Sánchez e Almarza (2008a, p. 33).

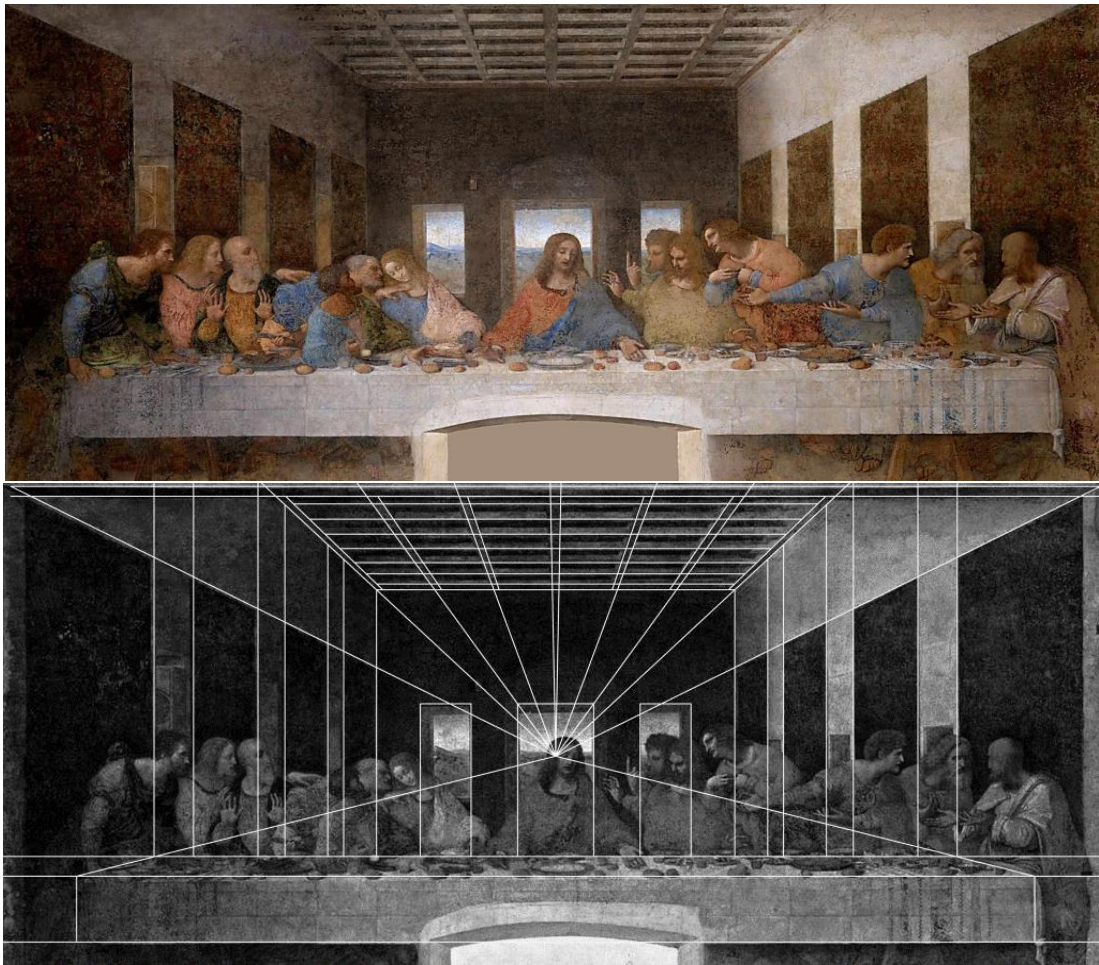
Os resultados dos estudos de Leonardo da Vinci sobre perspectiva podem ser observados em sua obra como pintor. As relações de proporcionalidade entre distância do observador, tamanho do objeto, e suas dimensões no plano de representação foram aplicados por ele em pinturas como *A Última Ceia* retratada na figura 53.

Para realizar essa pintura, Da Vinci considerou, por exemplo, as dimensões da parede a ser pintada em relação às da sala na qual ela se localiza para dispor cada um dos elementos de modo que, ao entrar na sala, o observador tenha uma visão completa da pintura. Para Da Vinci, o ponto ideal de observação seria de 10 a 20 vezes maior que a altura ou largura de uma pintura. Como, *A Última Ceia* tem 9m x 4,5m tal ponto ficaria de 90 a 180 metros de distância o que era impossível devido ao tamanho do refeitório no qual foi feita. Diante desse problema, Leonardo da Vinci idealizou um ponto de observação artificial ideal acerca de nove metros da parede e a 4,5 metros de altura (ISAACSON, 2017).

Além do uso da proporcionalidade, nessa pintura, Da Vinci fez uso do ponto de fuga para o qual convergem todas linhas de visão (o olhar do observador) e é

responsável pela sensação de profundidade. Em A Última Ceia o ponto de fuga fica na mesma posição da frente de Jesus, que está ao centro na mesa, e faz com que as atenções do observador se voltem para ele. Pela observação da pintura pode-se perceber, ainda que as laterais da mesa, as janelas laterais e os detalhes no teto têm formato retangular e convergem para o ponto de fuga mencionado, convergência que causa a redução das dimensões dos detalhes mencionados.

Figura 53: A última ceia e a perspectiva

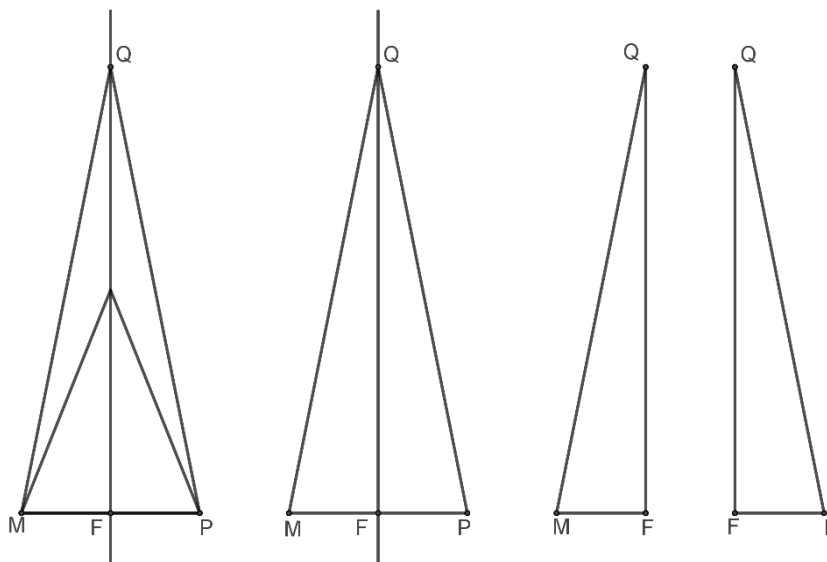


Fonte: Adaptado de Isaacson (2017, p. 313-314).

A proporcionalidade entre triângulos semelhantes, que é um dos fundamentos geométricos da perspectiva, bem como as razões e proporções entre segmentos de reta que fazem parte dessa proporcionalidade, são objetos da geometria escolar da Educação Básica. Por isso, o estudo desses temas nesse nível, pode ser feito a partir de interpretações e problematização de folhas do Códice Atlântico que tratam da perspectiva, pois os objetos de geometria refletidos nessas folhas, são comuns aos objetos geométricos da Educação Básica.

Semelhança de triângulos é um dos objetos de conhecimento que fazem parte da geometria do 9º ano do Ensino Fundamental. A partir do estudo desse objeto os estudantes devem “Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos” (BRASIL, 2017, p. 317). Na folha 119r, qualquer um dos triângulos isósceles do desenho principal (figuras 52 e 53), podem ser transformados em dois triângulos retângulos, se for traçada a altura. A figura 54 retrata o desenho de Da Vinci e a sua decomposição em triângulos retângulos semelhantes. Esses triângulos podem ser relacionados com o teorema de Pitágoras e outras relações métricas do triângulo retângulo previstas no currículo da geometria escolar.

A figura 54: Relação entre triângulo isósceles e triângulo retângulo

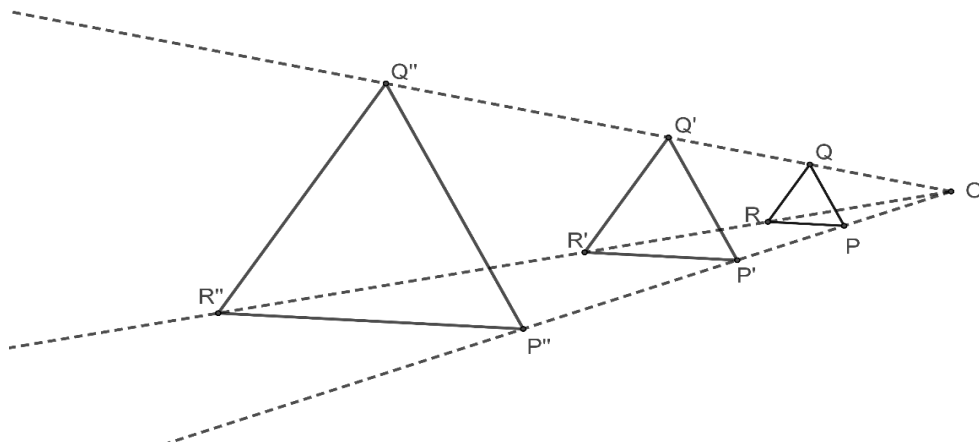
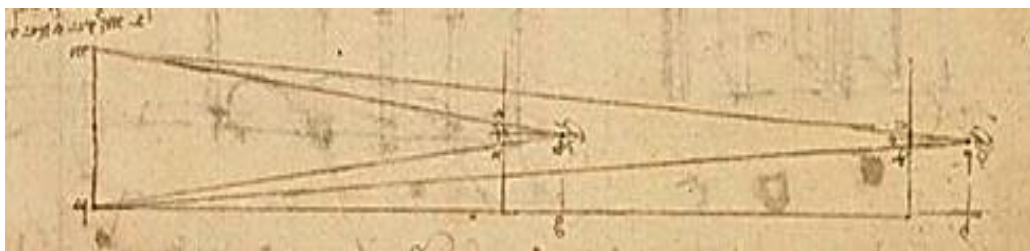


Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008b, p. 111).

No 5º ano do Ensino Fundamental um dos objetos de conhecimento é a “ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes” (BRASIL, 2017, p. 294). Esse objeto, faz parte da unidade temática Geometria e que está refletido nos estudos de Da Vinci em destaque, pois um de seus objetivos era definir qual o tamanho ideal de uma pintura, quais as suas dimensões em relação a sua distância de um determinado observador para que este tenha uma visão perfeita da pintura. Mas o aumento ou diminuição precisaria conservar as proporções do objeto a ser representado e, por isso, a aplicação da proporcionalidade dos triângulos semelhantes nos estudos sobre perspectiva.

A figura 55 relaciona o desenho de Da Vinci a ampliação e redução de figuras que chamamos de homotetia, ou seja, uma transformação que conserva os ângulos e a proporcionalidade dos lados congruentes das figuras. Parece estranha a comparação dos desenhos pelo fato de que o desenho de Da Vinci não está em perspectiva como o que está abaixo dele. Porém, o que ocorre com o objeto a ser representado por Da Vinci nos planos de representação P_1 e P_2 , é similar à ampliação do triângulo PQR que é transformado em $P'Q'R'$ e depois em $P''Q''R''$.

Figura 55: Ampliação e redução de figuras



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008b, p. 111).

À medida que aumenta a distância do ponto O , ampliam-se as dimensões do objeto que são reduzidas quando essa distância diminui. De maneira análoga essa ampliação e redução ocorre no esquema estudado por Leonardo da Vinci na folha 119r e em A Última Ceia (figura 53) na qual é possível identificar a ampliação e redução dos objetos representados, que ocorre em relação ao ponto de fuga (frente de Jesus). A observação dos retângulos nas paredes e teto (por exemplo) pode evidenciar que: à medida que se aproximam do ponto de fuga, suas dimensões diminuem e, à medida que se afastam elas aumentam.

De acordo com a BNCC (p. 266), proporcionalidade é umas das “ideias fundamentais” dentre aquelas tidas como importantes para o desenvolvimento do

pensamento matemático dos estudantes. Por isso, essa ideia deve se converter, na escola, em objetos de conhecimento. Assim, a proporcionalidade deve ser conhecida pelos estudantes e para isso deve ser objeto de estudo nas salas de aula de matemática da Educação Básica o que pode ser feito a partir dos estudos de Leonardo da Vinci sobre perspectiva que têm como uma de suas bases a proporcionalidade.

A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2017, p. 266).

Portanto, como uma das ideias fundamentais da matemática a proporcionalidade ultrapassa as fronteiras da geometria e adentra a outros campos da matemática escolar como, por exemplo, nos anos 4^o, 6^o e 7^o do Ensino Fundamental, nos quais a proporcionalidade está inserida nas unidades temáticas Números e Álgebra, pois pode ser aplicada em cálculos numéricos e na resolução de problemas que resultam em uma proporção que pode ser traduzida por uma equação (BRASIL, 2017).

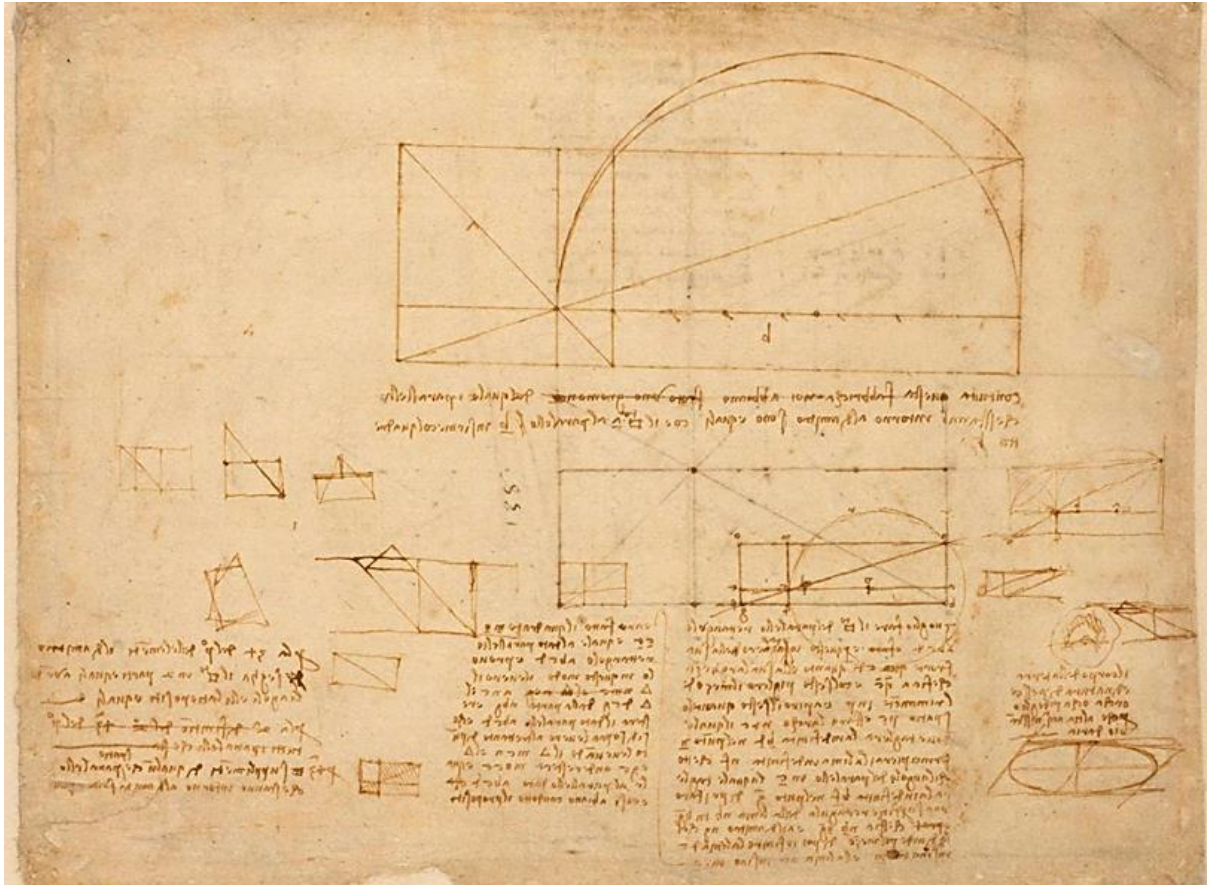
De forma sintética, a linguagem geométrica de Da Vinci contida na folha 119r tem como objeto a perspectiva, fundamentada na proporcionalidade entre triângulos semelhantes; nossa análise evidenciou as relações entre a perspectiva a arte de Da Vinci os objetos da geometria por ele mobilizados; tais objetos também são objetos de conhecimento da matemática escolar, principalmente, do 4^o, 5^o, 6^o, 7^o e 9^o ano do Ensino Fundamental e esse foi o elo que possibilitou o estabelecimento de relações entre a perspectiva refletida na folha 119r do Códice Atlântico e os objetos da geometria da Educação Básica.

Da geometria plana e seus fundamentos refletidos

O tema que selecionamos para iniciar o estudo da categoria geometria plana se refere as transformações de figuras planas e à conservação de sua área, cuja relevância nos estudos de Leonardo da Vinci já foi mencionada. Na folha 544r (figura 56) Da Vinci processa a quadratura do retângulo, a partir das Proposições 34 e 43 do Livro I e da definição 2 e proposição 14 do livro II de *Os elementos* de Euclides. Assim, o objeto ao qual a folha se refere é a quadratura citada que envolve um grupo de

desenhos geométricos (em torno de 14,) que em sua maioria trata da quadratura do retângulo.

Figura 56: Folha 544r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008j, p. 9).

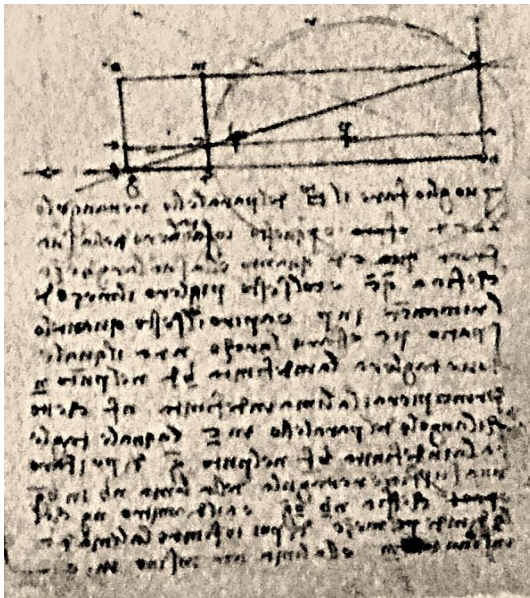
Na parte superior central da folha o desenho maior é um retângulo, sobre o qual são traçados segmentos horizontais, verticais e diagonais que o subdividem em retângulos e triângulos. Há, ainda, dois arcos de circunferência na parte superior. Um grupo de desenhos menores abaixo parecem reproduzir o desenho maior e outros parecem ser partes originadas pela sua divisão. No canto inferior direito da folha há um desenho oval que parece não ter relação com os outros desenhos da folha.

Pode-se identificar, ainda, a presença de escritos que se dividem em cinco grupos: um abaixo do desenho maior, na metade superior da folha, e outros quatro em colunas verticais na metade inferior da folha. O texto de cada grupo parece ter relação com os desenhos que ficam próximos a ele o que foi possível inferirmos após o estudo das transcrições e a tradução, que nos ajudou a compreender como Da Vinci procedeu para fazer a quadratura do retângulo. Além disso, os desenhos e os escritos

de Da Vinci, nessa folha, mostram como ele associava a demonstração escrita à geométrica, uma vez que a ferramenta que ele dominava era o desenho. Essa descrição da folha e de seus elementos auxilia no entendimento do tema central a que ela se refere e só foi possível a partir dos efeitos interpretativos que a folha 544r causou em nós.

Dos cinco grupos de textos, destacamos, inicialmente, o que está na terceira coluna, da esquerda para a direita, juntamente com o desenho a que se refere. O destaque se deu por ser esse texto aquele em que Leonardo da Vinci descreve com mais completude a demonstração que fez. Nos demais ele escreve apenas fragmentos as vezes incompletos mas que, também, sirvam para compor a ideia central. A figura 57 representa o desenho, os escritos de Leonardo da Vinci, logo abaixo, e a tradução livre que fizemos a partir da transcrição de Augusto Marinoni. O desenho apresenta os vértices e outros pontos nomeados como os pontos n , m , o , no lado horizontal superior e os pontos b , d , g no lado horizontal inferior do retângulo maior.

Figura 57: Procedimento de Leonardo da Vinci para quadrar o retângulo



Quero fazer o quadrado do retângulo do paralelo $a b c d e$, para isso, cortarei (na testa $c d$, a qual é a largura) que é para $a q c$; e com o sexto, tomarei o meio do restante em p , e abrirei o sexto até o espaço pc , e farei o arco ncr , que cortará o bd indefinido no ponto n , você definirá a linha indefinida nf , que toca o ângulo do paralelo em e , que cortará o bf indefinido no ponto g . Então farei um retângulo superfi da linha $n b$ em $b g$, que é $n b o g$, e tenho o diametro $n g$ que o divide pela metade. Então terminarei a linha $d c$ insino em m , e a linha $a c$ insino em e , e o quadrado $m o c e$, é igual ao retângulo paralelo dado $a b c d$. É assim: tornarei o triângulo $a n c$ e o triângulo $d c g$ da parte $n b g$, e o paralelo dado permanecerá $a b c d$. E assim, acima, levantarei o máximo de pontos, elevando o triângulo $m c n$ e o triângulo $e g c$, de modo que restará $m o c e$ igual ao paralelo dado $a b c d$; e assim eles conduziram o propósito.

Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008j, p. 153-154).

A interpretação da folha em estudo exigiu algumas ações fruto do efeito energético: o trabalho de observação e estudo do texto transcrito, estudo da tradução que fizemos e sua correlação com os desenhos e com o método adotado por Leonardo da Vinci para quadrar o retângulo e o estudo de Os elementos, fundamento que ele adotou na demonstração. Essas ações nos permitiram identificar no texto duas incoerências do ponto de vista matemático, quando posto em correspondência com o desenho, pois dois pontos da figura, que foram identificados por letras minúsculas (pontos e e n) não estão localizados nela como o texto se refere.

A partir de nossa interpretação do desenho e da demonstração de Leonardo da Vinci no texto escrito, concluímos que o retângulo que se quer quadrar é o retângulo $abcd$ (figura 58), que será usado para que se esclareçam as incoerências apontadas. O ponto q é a medida da altura do retângulo que foi subtraída por Leonardo da Vinci do segmento ac para que fosse obtido aq e, posteriormente o seu ponto médio p . O segmento pc , por sua vez, será o raio do arco que irá determinar a medida do lado do quadrado que se deseja encontrar.

Figura 58: Retângulo $abcd$



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008j).

A primeira incoerência que encontramos está na frase *farei o arco ncr, que cortará o bd indefinido no ponto n*. Nela Leonardo da Vinci descreve o procedimento que tomou para traçar um arco que irá cortar o prolongamento do lado bd , do retângulo $abcd$, no ponto n . Tal arco tem raio pc (figura 58) e é traçado a partir do ponto c no sentido anti-horário em direção ao prolongamento do lado esquerdo vertical ba , do retângulo $abcd$, intersectando-o no ponto n . Assim, o ponto n é o ponto de intersecção do arco com o prolongamento do lado ba e não deste com bd como está escrito na transcrição do texto de Leonardo da Vinci.

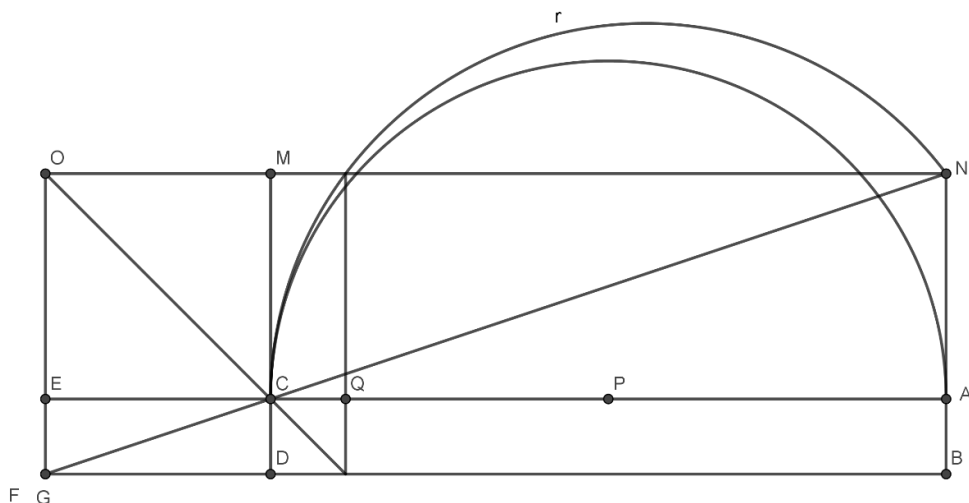
A seguir o texto traz a frase: *você definirá a linha indefinida nf, que toca o ângulo do paralelo em e, e cortará o bf indefinido no ponto g*. Novamente, encontramos uma incoerência, pois a linha nf , é a diagonal (figura 59) que parte de n e toca o vértice c do retângulo $abcd$. Essa diagonal não passa pelo ponto e , pois, mais adiante,

Leonardo da Vinci se refere ao ponto *e* como a intersecção do prolongamento do lado *ac* com o lado *fo* do retângulo maior o que o localiza em outro lugar do desenho, qual seja o vértice do segmento *ce* que é lado horizontal inferior do quadrado *moec*. Informamos que os pontos *a, b, c, e, d* etc. que constam em nossa tradução são os mesmos que estão na transcrição do texto de Leonardo da Vinci que está em italiano e que os colocamos em minúsculas por estarem assim no referido texto.

Tais incoerências podem ter ocorrido por fatores como: problemas com a tradução que fizemos, equívocos cometidos na transcrição dos manuscritos de Leonardo da Vinci, o que é compreensível por se tratar de uma escrita do século XV e feita da direita para a esquerda, como já se sabe da escrita de Da Vinci, ou por ter Leonardo da Vinci trocado, intencionalmente (ou não) algumas letras que se referem a pontos do desenho para manter seu método em sigilo o que para Isaacson (2017) era prática de Da Vinci para que suas descobertas e inventos não fossem copiados.

Para que o procedimento de Da Vinci na quadratura do retângulo ficasse mais compreensível, utilizamos a figura maior da folha em estudo como base para elaborar um desenho no qual os pontos foram marcados de forma que houvesse uma coerência entre o desenho, o texto transcrito e o método usado na demonstração e escrevemos um texto explicativo do procedimento. Reiteramos que as alterações que fizemos se deram a partir da transcrição do texto do próprio Da Vinci e de nosso entendimento dos procedimentos tomados por ele na demonstração. A figura 59 destaca o desenho que representa a quadratura do retângulo feita por ele.

Figura 59: Quadratura do retângulo



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008j).

A partir do desenho é possível identificar o retângulo que se quer quadrar $ABCD$ e o quadrado $MOEC$ de mesma área obtido no procedimento ambos internos ao retângulo maior $BNOG$. Destacamos, ainda os pontos Q ($CQ = CD$), o ponto P e o ponto N , importantes para que se compreenda a demonstração de Leonardo da Vinci que inicialmente traçou um semi-círculo AC que não serviu para a demonstração.

Leonardo da Vinci deixa clara sua intenção de fazer um quadrado do retângulo $ABCD$ e inicia os procedimentos. Ele mede a altura DC do retângulo e subtrai essa medida do lado AC , a partir de C , marcando o ponto Q . Assim, obtêm o segmento CQ que tem a mesma medida da altura DC . Observe o segmento AC na figura 60. Ao subtrair o segmento CQ de AC , resta o segmento AQ . Leonardo da Vinci encontra, então, o ponto médio P do segmento restante AQ . Centra o compasso em P , o abre até C . Com essa abertura, traça o arco de circunferência NCr , que vai de C , no sentido anti-horário, até o ponto N que é intersecção do referido arco com o prolongamento do lado vertical direito do retângulo $ABCD$, ou seja, o lado BA . O segmento AN encontrado corresponde ao lado do quadrado que se quer encontrar. Leonardo da Vinci traça a linha NF , que passa por C , e a prolonga até que ela intersecte o prolongamento do lado BD no ponto G . Em seguida ele constrói o retângulo que tem como lados os segmentos NB e BG , que chama de $NBOG$ de diâmetro NG .

Até esta parte da seção, entendemos que ainda não ficou claro o suficiente o método de Leonardo da Vinci para quadrar o retângulo $ABCD$. Com vistas a compreender e explicar da melhor forma possível tal método e seus procedimentos passo a passo recriamos o desenho feito por ele, usando os mesmos instrumentos da época, ou seja, régua e compasso. Procuramos ser o mais fiel possível aos procedimentos de Da Vinci utili, mas utilizando a linguagem matemática atual.

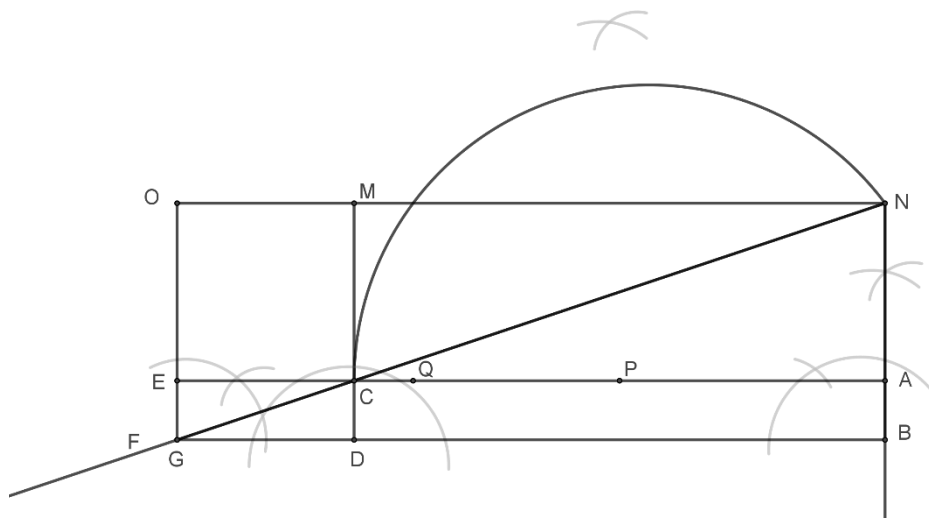
Os procedimentos que adotamos resultaram na figura 60 e podem ser seguidos por quem decidir refazer os passos de Da Vinci no processo de quadratura do retângulo.

- ✓ Construa um retângulo $ABCD$ de lados quaisquer;
- ✓ Meça com o compasso a altura (CD) do retângulo;
- ✓ Mantendo-se a abertura CD , fixe o compasso em C e “corte” o lado AC no ponto Q . Assim, $CQ = CD$;
- ✓ Considere, agora o segmento restante AQ e obtenha o seu ponto médio P .
- ✓ Fixe o compasso no ponto P e abra-o até o ponto C ;

- ✓ Mantenha a abertura e trace um semicírculo com centro em P , no sentido antiorário, a partir de C ;
- ✓ Prolongue o lado vertical direito (BA) do retângulo $ABCD$ até intersectar o semicírculo e chame este ponto de intersecção de N . O segmento AN corresponde a medida do lado do quadrado que pretende construir. Com essa medida já é possível construir um quadrado, com régua e compasso, com área equivalente à do retângulo $ABCD$. No entanto, Leonardo da Vinci segue a demonstração e falaremos sobre esse aspecto mais adiante. Assim, seguimos com ele.
- ✓ Trace uma semirreta NC , a partir de N ;
- ✓ Prolongue o lado horizontal (BD) do retângulo $ABCD$ até intersectar a semirreta NC . Chame esse ponto de intersecção de G ;
- ✓ Trace uma perpendicular passando por G ;
- ✓ Meça com o compasso o lado BN e com essa medida, na perpendicular, obtenha o segmento GO , paralelo a BN ;
- ✓ Trace o segmento NO . Você obteve o retângulo $NBOG$;
- ✓ Prolongue o segmento DC até intersectar NO e marque o ponto M de intersecção;
- ✓ Prolongue AC até intersectar OG e marque o ponto de intersecção E ;

Com esse passo-a-passo e com a construção da figura 60, julgamos se tornar mais compreensível o procedimento de Leonardo da Vinci para quadrar o retângulo.

Figura 60: Desenho com régua e compasso



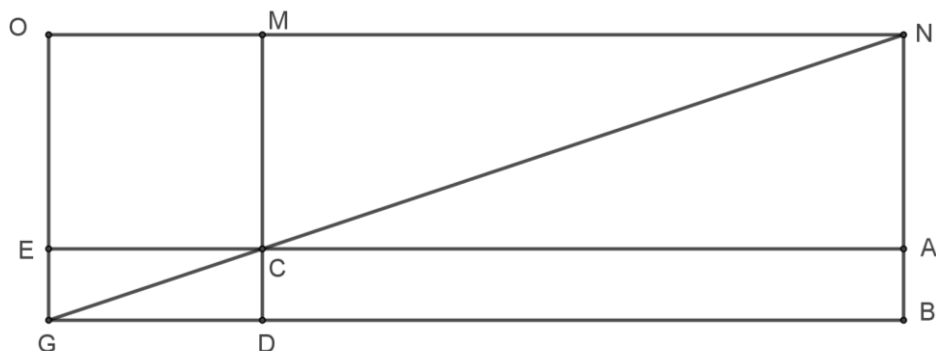
Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008j, p. 153-154).

Resta, porém, fazermos a correspondência entre a demonstração de Da Vinci, a figura que construímos a partir dela e os fundamentos de Euclides utilizados por Da Vinci para dar sustentação teórica a sua demonstração. Assim, retomaremos a demonstração de modo a explicitarmos a prova que Da Vinci obteve de que o quadrado construído tem área equivalente ao retângulo inicial $ABCD$.

Ao traçar o segmento ng Da Vinci afirma: *tenho o diâmetro ng que o divide pela metade*, ou seja, afirma que diâmetro NG divide o retângulo maior $NBOG$ em duas partes de mesma área. Da Vinci faz essa afirmação embasado na Proposição 34 do Livro I de Os elementos, pois em outro fragmento de texto da folha em estudo ele menciona: *Pela trigésima quarta do primeiro livro dos Elementos, o diâmetro divide o quadrado em duas partes iguais, tendo os ângulos e lados opostos iguais*. Esse trecho está de acordo com o texto do livro de Euclides (2009, p. 124) referente a tal proposição, qual seja: *duas áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si, e a diagonal corta-as em duas*.

A partir dessa proposição, pode ser comprovada a validade da demonstração de Leonardo da Vinci, pois, observando a figura 61, pode-se verificar que o retângulo $NBOG$, é dividido em dois triângulos maiores NBG e NOG que, por Euclides I 34, têm mesma área. Observe que o triângulo NBG se subdivide em três porções: o triângulo NAC , o triângulo CDG e o quadrilátero $ABCD$. O triângulo NOG , também se subdivide em três porções: o triângulo NMC , o triângulo CEG e o quadrilátero $MOEC$.

Figura 61: Retângulo $NBOG$



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008j, p. 153-154).

Ocorre que os triângulos NAC e NMC têm mesma área por serem obtidos pela diagonal NC do quadrilátero $ANMC$; como os triângulos CEG e CDG , são obtidos pela diagonal do quadrilátero $DCEG$, também possuem mesma área. Assim, como já se

sabe, a partir de Euclides I 34, que os triângulos NBG e NOG têm mesma área. Conclui-se, portanto, que os quadriláteros $ABCD$ e $MOEC$ têm mesma área. Logo, o procedimento de Da Vinci resultou na construção de um quadrado ($MOEC$) de área equivalente à de um retângulo ($ABCD$).

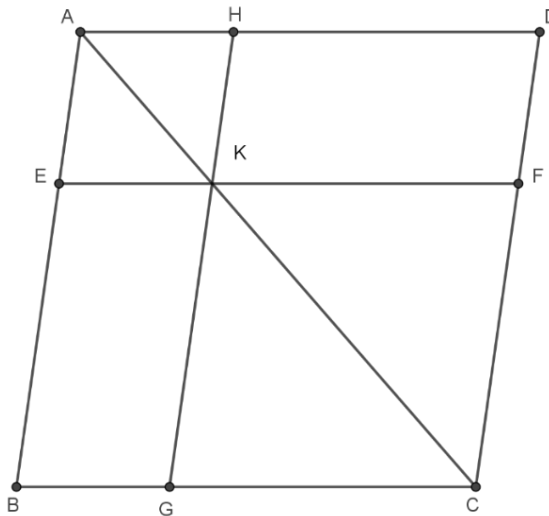
A interpretação do folha 544r apresentada até esta parte do trabalho reflete que foi necessário adquirirmos alguns conhecimentos e mobilizarmos outros que já tínhamos, para implementar ações necessárias à interpretação, assim, os desenhos foram refeitos, incoerências foram identificadas e o procedimento foi descrito de forma clara para tornar possível a vinculação dos signos (os desenhos) aquilo a que eles se referem, a quadratura do retângulo (o objeto do signo). As ações feitas caracterizam nosso movimento em direção ao signo característico da criação da regra interpretativa por meio da qual a interpretação dos aspectos simbólicos dos desenhos da folha em estudo se efetivou.

Vale ressaltar que, Da Vinci foi um estudioso dedicado e que não se contentou com a superficialidade dos temas por ele estudados. Ele aprofundava tanto os estudos que por vezes era traído por sua mente curiosa e desviava do foco inicial. Porém, não se sabe ao certo até que ponto Da Vinci estava interessado em buscar analogias na geometria para sua arte ou em aprender e praticar a geometria na busca por conhecê-la melhor. Após estudar parte de seus desenhos no Códice Atlântico e algumas biografias a seu respeito, pudemos interpretar que ele buscava o conhecimento para sua arte, mas que ia além e se dedicava, também, a geometria por prazer, curiosidade, vontade de conhecer e propor outra linguagem para aquela geometria. Talvez essa fosse a linguagem geométrica singular a qual nos referimos anteriormente.

Um exemplo de seu aprofundamento é o fato de que, na demonstração que ora estudamos, ele poderia ter interrompido quando traçou o arco NCr e encontrou o ponto N , uma vez que o segmento AN corresponde ao lado do quadrado que queria construir. Leonardo da Vinci segue a construção porque quer, ainda, verificar a utilização das proposições de Euclides em sua construção. Como já comprovamos, a proposição 34 foi suficiente para provar a equivalência entre as áreas do retângulo e do quadrado. Não contente, Leonardo da Vinci evoca, também, a proposição 43 do livro I de *Os elementos* que diz: *Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si*. No exemplar que adquirimos de *Os elementos*, a proposição 43 está acompanhada do desenho retratado na figura 63.

Considerando a figura 62, o paralelogramo em estudo é $ABCD$; sua diagonal é AD ; os paralelogramos a volta da diagonal são $AHKE$ e $KFCG$; os complementos dos paralelogramos a volta da diagonal são os quadriláteros $EBGK$ e $DHKF$. Pela proposição 43 esses quadriláteros ($EBGK$ e $DHKF$) têm áreas equivalentes. Agora comparemos a figura de *Os elementos* (figura 63) com o desenho de Da Vinci ou com os desenhos que obtivemos a partir do procedimento descrito (figura 60).

Figura 62: Paralelogramo de Os elementos



Fonte: Elaborado a partir de Euclides (2008, p. 129).

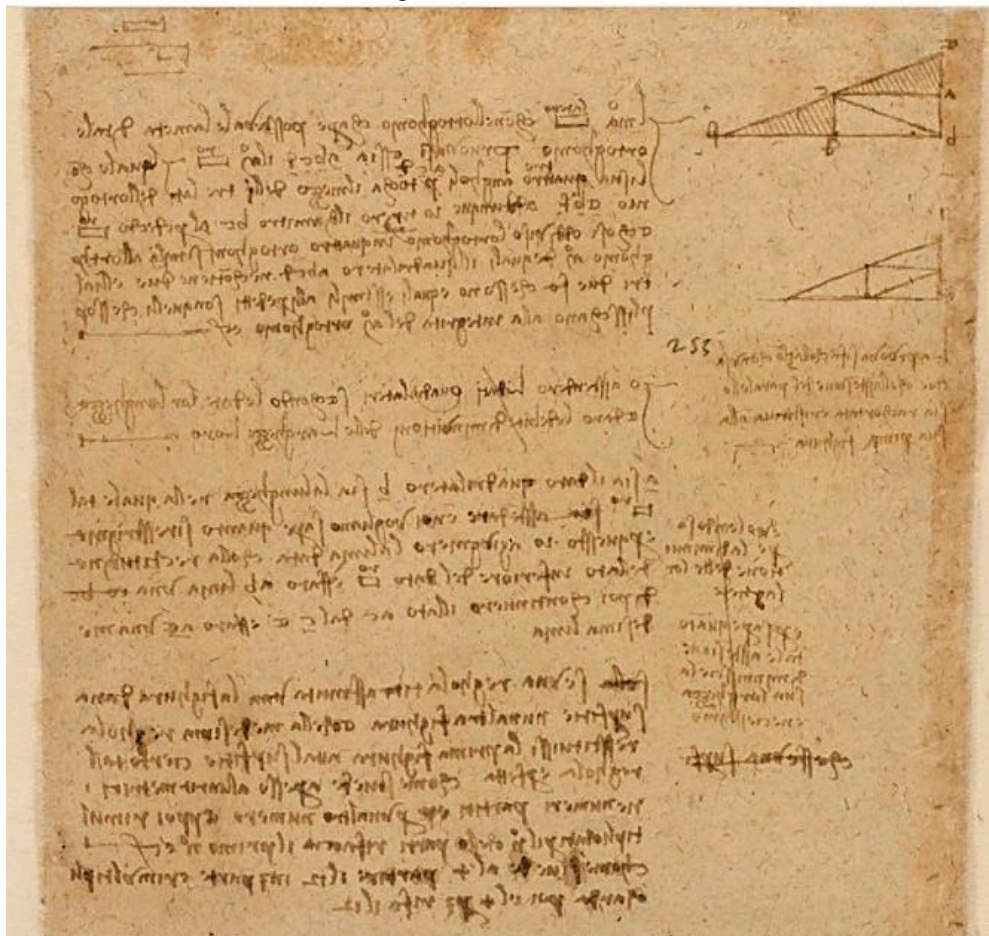
Pode-se verificar que o quadrilátero $ABCD$ de *Os Elementos* é semelhante ao construído por Da Vinci ($BNOG$). No paralelogramo de Leonardo da Vinci: a diagonal é NG ; os os paralelogramos a volta da diagonal são $ANMC$ e $DCEG$; os complementos dos paralelogramos a volta da diagonal são os quadriláteros $ABCD$ e $MOEC$. Pela proposição 43 esses últimos quadriláteros têm áreas equivalentes, ou seja, o quadrado obtido $MOEC$ tem área equivalente ao retângulo $ABCD$. Assim, novamente se comprovou o que Da Vinci pretendia provar.

Na sequência Da Vinci continua seu estudo e cita, ainda a definição 2 do livro II de *Os elementos* que diz: *E, toda área paralelogrâmica, um dos paralelogramos, qualquer que seja, à volta da diagonal dela, com os dois complementos, seja chamado um gnômon* (EUCLIDES, 2009, p. 124, 129, 135). Gnômon é a figura obtida pela junção de um dos paralelogramos a volta da diagonal do paralelogramo maior com seus complementos em relação a esse paralelogramo maior. Observando-se a figura 62 se for retirado o paralelogramo $KFCG$, obtém-se o gnômon mencionado. O mesmo

pode ser feito no desenho de Leonardo da Vinci se for retirado dele o quadrilátero ANMC.

Estudos como os da folha 544r foram feitos por Leonardo da Vinci de maneiras distintas. A folha 300r (figura 63), contida no volume 5 do Códice Atlântico, tem como tema o cálculo da área de um triângulo retângulo por sua decomposição em triângulos menores e um retângulo inscrito, tema semelhante ao da folha 544r, porém com outras características.

Figura 63: Folha 300r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008e, p. 85).

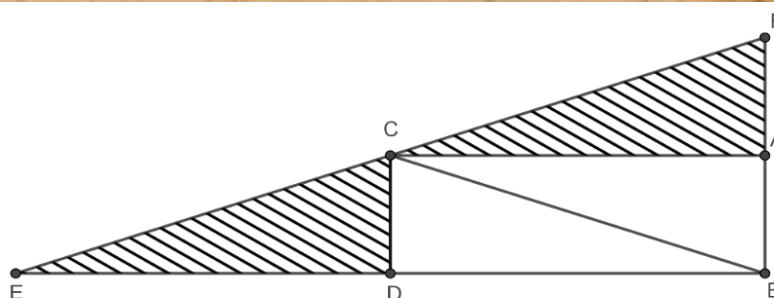
A descrição da folha menciona que “Se num triângulo retângulo, nos pontos médios de cada cateto, são traçadas as recíprocas, paralelas, obtém-se um retângulo de superfície igual à metade do triângulo”. Além disso, se for traçada a diagonal do referido retângulo, ela dará origem a quatro triângulos menores e iguais, equivalentes ao triângulo inicial. Esse trecho refere-se a uma relação entre um retângulo inscrito em um triângulo retângulo e afirma que obedecidas as condições, o retângulo “terá

superfície igual à metade do triângulo” o que sugere que a área do retângulo é metade da área do triângulo.

Por sua vez, traçada uma diagonal do retângulo, “obtem-se quatro triângulos iguais”, ou seja, de mesma área e que são “equivalentes ao triângulo inicial”. Pela observação do desenho, esse último trecho significa para nós que, somadas as áreas dos quatro triângulos menores, obtém-se a área do triângulo maior e, como os quatro triângulos têm mesma área, cada um deles terá área igual à quarta parte da área do triângulo maior (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 218).

O referido desenho encontra-se no canto superior direito da folha e retrata o triângulo retângulo EBF , e o retângulo $ABCD$ cujos vértices C , D e A tocam os lados do triângulo em seus respectivos pontos médios e o vértice B coincido com o vértice do ângulo reto, característico do triângulo. A figura 65 destaca o desenho de Leonardo da Vinci e a leitura matemática que fizemos.

Figura 64: Retângulo inscrito no triângulo retângulo



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008e, p. 85).

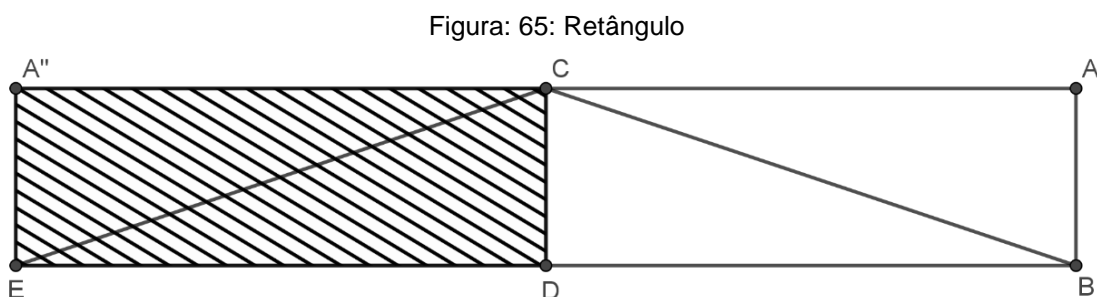
No triângulo retângulo EBF de lados EF , BF e BE , temos que o ponto C é o ponto médio do segmento EF , o ponto A é o ponto médio de BF e D é o ponto médio de BE . Traçando-se os segmentos DC e AC , teremos o retângulo $ABCD$, cuja diagonal é BC , e quatro triângulos EDC , CDB , CAB e CAF , além do triângulo maior EBF . Para verificar se a afirmação contida na descrição é verdadeira, teremos que provar que:

1) o retângulo $ABCD$ tem superfície (área) igual à metade da superfície do triângulo EBF ; e 2) que os triângulos EDC , CDB , CAB e CAF são congruentes.

Começaremos pela prova 2. Sabemos que a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos de mesma área, logo, CAB e CDB são congruentes. Como A é o ponto médio de BF , FA e BA têm mesmo comprimento e CA é lado comum aos triângulos CAF e CAB que são retângulos em A . Assim, esses triângulos têm dois lados e o ângulo entre eles, congruentes. Assim, por LAL ²³, esses triângulos são congruentes. De maneira análoga EDC e CDB , que são retângulos em D , têm o lado CD em comum e ED e BD com a mesma medida, já que D é o ponto médio de EB . Assim, por LAL , EDC e CDB são congruentes. Como CAB e CDB são congruentes, EDC é congruente a CDB e CAF é congruente a CAB , os quatro triângulos em estudo são congruentes, ou seja, possuem mesma área.

Essa conclusão é suficiente para a prova 1, pois se o triângulo EBF se subdivide em quatro triângulos menores de mesma área e o retângulo $ABCD$ tem área equivalente a dois desses triângulos, logo, a área do retângulo $ABCD$ equivale à metade da área do triângulo EBF . Portanto, o triângulo retângulo EBF , tem área igual ao dobro da área do retângulo nele inscrito e igual ao quadruplo da área de cada um dos triângulos que o compõem no desenho de Leonardo da Vinci da folha 300r.

Outra maneira de provar o que se propõe na folha em estudo é fazendo um deslocamento do triângulo sombreado que fica acima do retângulo (CAF) para completar o outro triângulo sombreado (EDC). Esse deslocamento consiste em uma rotação de 180° de CAF no sentido anti-horário em torno do ponto C , como se observa na figura 65.



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008e).

²³ Dois triângulos são congruentes quando dois lados e o ângulo compreendido entre eles são, respectivamente, congruentes.

Na figura, o ponto A se desloca e origina A' e o ponto F se desloca e coincide com E . Esse movimento dá origem ao retângulo $ABEA'$ que é composto por dois retângulos menores ($ABCD$ e $A'CDE$), cada um dos quais se subdivide em dois triângulos a partir de sua diagonal. O retângulo maior é formado por quatro triângulos congruentes e sua área é equivalente à área do triângulo EBF . Essa demonstração geométrica, também é suficiente para provar o que foi enunciado na descrição da folha e faz uso de uma técnica utilizada e discutida por Leonardo da Vinci no Códice Atlântico, qual seja a transformação de uma figura em outra de mesma área.

A geometria plana refletida na folha 300r remete aos temas de geometria ensinados na Educação Básica dentre os quais destacamos: determinação de áreas de retângulo e triângulo, segmento de reta, ponto médio de um segmento, congruência entre triângulos e entre retângulos, triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e coordenadas no plano cartesiano se essa figura for desenhada a partir da associação de seus vértices a pontos do plano e sua localização neste. São temas que fazem parte da matemática dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano).

Congruência de triângulos, por exemplo, faz parte do currículo de matemática do 8º ano e a partir do seu estudo espera-se que o estudante seja capaz de “Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos” (BRASIL, 2017, p. 313), habilidade que pode ser desenvolvida pelo estudo da folha 300r cujo desenho de Leonardo da Vinci trata exatamente da congruência de triângulos e da sua relação com o retângulo que é um quadrilátero.

Assim, o estudo da geometria no Ensino Fundamental não pode reduzir-se a aplicação de fórmulas de cálculo de área e volume, por exemplo, outros recursos como a equivalência de áreas, que já se pratica há milhares de anos por povos como os gregos antigos e mesopotâmios, possibilita transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com área equivalente. Os gregos chamavam esse método de fazer a quadratura de uma figura. Assim, propomos sua utilização no ensino de geometria na Educação Básica por meio dos estudos dos desenhos do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci considerando os indicativos dos documentos curriculares oficiais (BRASIL, 2017).

Determinação da área de figuras planas, por sua vez, é tema do currículo dos quatro anos que correspondem aos anos finais do Ensino Fundamental. No 7º ano, por exemplo, um dos objetos de conhecimento se refere ao tema que abordamos no

estudo do triângulo desenhado por Leonardo da Vinci e enfatiza o método discutido quando registra sobre a,

Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros (BRASIL, 2017, p. 306).

Dessa forma, o estudo dos temas de geometria que fazem parte do currículo da Educação Básica, em especial do Ensino Fundamental, poderão ser ensinados por meio de desenhos contidos em manuscritos antigos como os que contém o Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, pois tais desenhos, mesmo não tendo sido feitos ou pensados para esse fim, têm em sua constituição, elementos que remetem ou refletem a geometria desse nível de ensino.

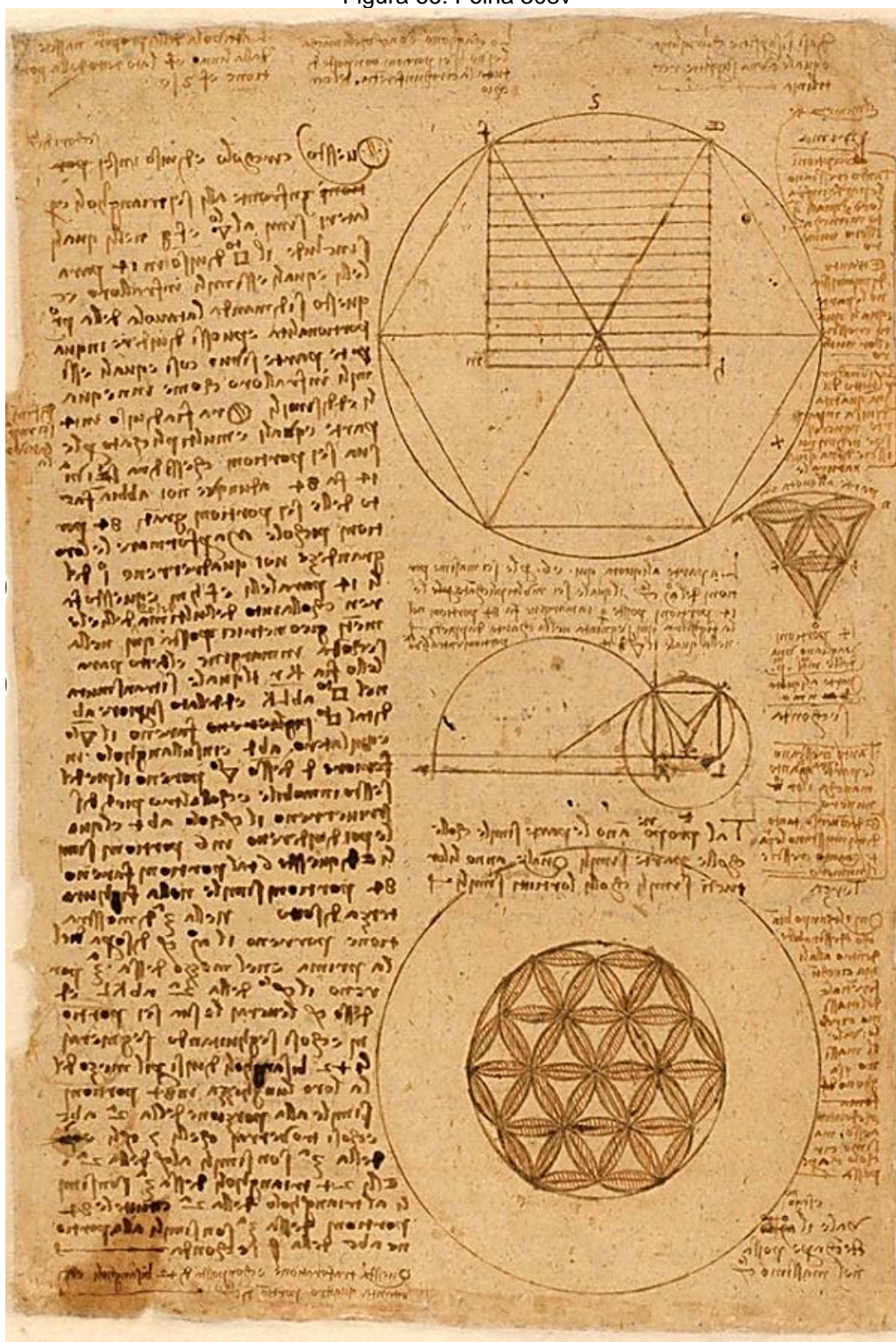
Das artes da quadratura do círculo imaginadas e estabelecidas

A folha 308v (figura 66), que está no volume 5 da coleção estudada, contém 4 desenhos e textos organizados em blocos, por toda a sua extensão. Há três pequenos blocos de texto na parte superior, uma coluna de texto que ocupa toda a metade esquerda da folha e outros blocos junto a margem direita e entre os desenhos. Seguindo a orientação vertical, o 1º desenho remete a um hexágono inscrito em uma circunferência que contém, ainda, um quadrado dividido em retângulos horizontais. Logo abaixo há o 2º desenho menor, em formato triangular, cuja superfície foi subdividida em regiões claras e escuras, cujas fronteiras são curvas.

O 3º desenho contém partes que remetem a semicircunferência, circunferência, quadrado, retângulo, raio e triângulo que parecem se relacionar de algum modo. Por fim, o 4º desenho, junto a margem inferior, contém circunferências concêntricas que formam uma coroa. A circunferência interna contém subdivisões com fronteiras curvas que remetem ao 2º desenho de forma triangular o qual parece ser uma parte ou um detalhe deste último desenho.

Esses desenhos e blocos de texto são os signos que compõem a folha em estudo. Eles se referem, de um modo particular (objeto imediato), a algo que lhes é externo (objeto dinâmico), ou seja, a objetos de um campo de referência específico. Para identificar os objetos a que se referem e o campo de referência dos signos olhamos a folha de dois modos: primeiro observamos suas partes e depois a sua composição como um todo.

Figura 66: Folha 308v



Fonte: Sánchez e Almarza (2008, p. 102).

Ao olhar a folha parte por parte, especificamente cada desenho, pode-se perceber que eles contêm elementos que se referem à geometria. A sua organização, de um modo particular, os relaciona a alguns objetos geométricos específicos dentre os quais se destacam: círculo, hexágono, quadrado, triângulo, retângulo e coroa

circular, já mencionados. Assim, os desenhos contidos na folha se referem a objetos da geometria que, por sua vez, é o campo de referência de tais desenhos.

Se a folha for olhada como um todo observamos que há uma organização no que se refere à qualidade aparente e a disposição dos blocos de texto e dos desenhos, pois o texto está escrito todo na horizontal, não se sobrepõe aos desenhos e foi escrito de forma intercalada a estes, sugerindo que se referem ao desenho do qual estão próximos. Além disso, os desenhos têm qualidade visual e dimensões que facilitam sua visualização e entendimento. Essa organização da folha como um todo, nos possibilitou inferir que há uma complementaridade entre desenho e texto com foco na transmissão de uma mensagem única. O que queremos dizer é que, o modo como os signos foram organizados na folha, sugere que ela se refere a um tema central, ou seja, que ela, na sua totalidade, tem um objeto de referência que engloba os objetos da geometria já citados. Mas que objeto é esse?

Esse objeto, tema central da folha, é o problema da quadratura do círculo o qual identificamos com base na leitura da descrição da folha e na transcrição do texto de Da Vinci (nela contido) do qual fizemos uma tradução (livre) que possibilitou acessar o seu significado e comprovar a complementaridade mencionada entre os blocos de texto e os desenhos. De forma específica a folha 308v se refere a um dos modos (ou técnicas) desenvolvidas por Leonardo da Vinci, na tentativa de solucionar o referido problema: trata-se da divisão de uma circunferência em porções equivalentes e/ou proporcionais no que se refere à sua superfície (área) com foco na equivalência de superfícies curvilíneas e retilíneas, ou seja, entre superfícies planas limitadas por curvas e aquelas em formato de polígonos. Isso porque o problema da quadratura a ser resolvido busca, em suma, a mesma equivalência, já que visa obter um quadrado com área equivalente à área de um círculo dado.

As conclusões a que chegamos até esta parte do trabalho foram possíveis por termos buscado informações que nos levassem a compreender o significado da linguagem contida na folha, ou seja, identificar ao que se referem os signos (desenhos e anotações) nela contidos. Isso foi possível porque, ao visualizarmos a folha, ficamos sob seus *efeitos*: primeiro o *emocional* que nos causou interesse por ela (pois entre as 124 folhas desse tema escolhemos ela para análise); segundo o *efeito energético* que nos impulsionou a buscar informações novas para compor a *regra interpretativa*; e terceiro o *efeito lógico* que nos levou a compor e internalizar a regra interpretativa,

ou seja, que nos levou a estudar o tema para ampliar²⁴ nossos conhecimentos sobre o campo de referência da folha e de seus signos particulares. Mas como esses efeitos operaram na prática?

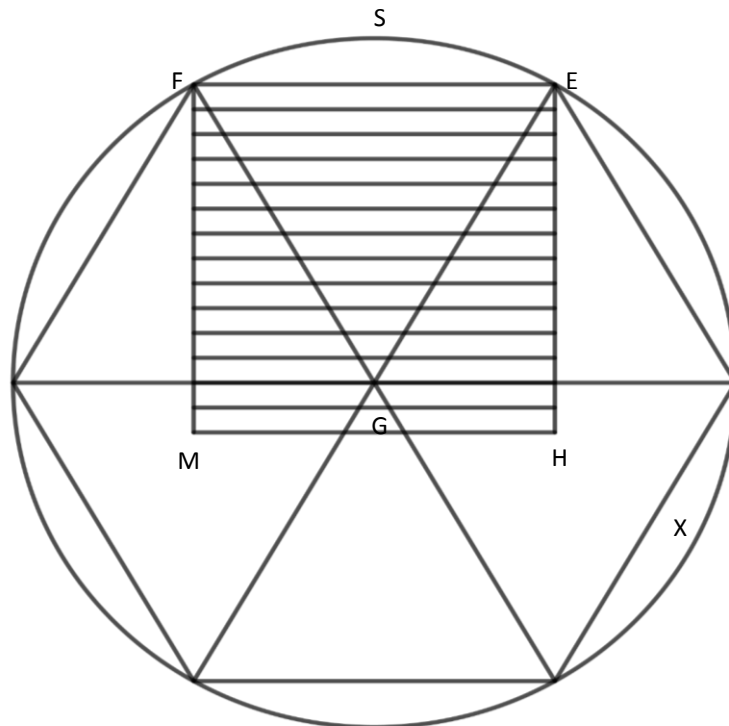
Esses efeitos se materializaram na interpretação da folha e de seus signos, no processo de significação (a semiose) por meio do estudo da linguagem geométrica da folha (texto e desenhos). Esse estudo permitiu que compreendêssemos como os desenhos se relacionam (entre si), como eles compõem a totalidade da folha e qual o objetivo de Leonardo da Vinci na sua feitura. Sinteticamente, a linguagem geométrica da folha, trata da divisão de uma porção do círculo em 14 partes (equivalentes entre si) que foi explicada, de forma ordenada e organizada, por meio dos 4 desenhos já mencionados. A sequência da explicação, o método para a divisão proposta, segue a orientação vertical de cima para baixo, a mesma que seguiremos em nossa explicação.

No primeiro desenho Leonardo da Vinci fez uma circunferência e inscreveu nela um hexágono o que originou 6 porções equivalentes, cada uma limitada por um arco da circunferência e por um lado do hexágono (Observe o desenho!) Da Vinci chama essa porção de porção máxima. O hexágono foi decomposto em seis triângulos equivalentes (que como se sabe são equiláteros) e, sob um dos lados do hexágono, construiu um quadrado interno á circunferência (Observe o desenho!). Esse quadrado, foi subdividido em 14 retângulos horizontais que são equivalentes entre si. Observe a figura 67 e tente visualizar cada parte feita por Da Vinci e descrita por nós textualmente.

Uma das 6 porções do círculo foi identificada, por Da Vinci, pelos pontos E, F , que determinam um segmento de reta que é um dos lados do hexágono, e pela curva S que é um arco de círculo, ou seja, a porção ESF é a porção máxima tomado por ele como exemplo. Além dela foram identificados o quadrado $EFMH$, o centro do círculo G e o lado do hexágono X . Essa identificação nos auxiliou na compressão do desenho e da sua relação com o contexto geral da folha. Mas qual a relação desses elementos com a quadratura do círculo?

²⁴ Ampliar pelo fato de sermos (eu e meu orientador) professores de matemática e já conter conhecimentos sobre o campo da geometria que se somaram novos (obtidos a partir do estudo do Códice Atlântico e de outros textos referidos neste trabalho) para compor a regra interpretativa dos signos da folha 308v e das demais folhas analisadas neste trabalho.

Figura 67: Quadrado da proporcionalidade



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008, p. 102).

Ao inscrever o hexágono no círculo, Leonardo da Vinci relacionou as áreas do hexágono e do círculo, pois ao observar o desenho (figura 67) percebemos que a área do círculo é equivalente à área do hexágono, somada às áreas das 6 porções máximas. Como o hexágono é uma figura retilínea (e por isso pode ser transformado em quadrado)²⁵, resta “quadrar” as 6 porções mencionadas, ou seja, transformá-las em quadrado ou em outra figura retilínea que, por sua vez, será transformada em quadrado. Assim, Leonardo da Vinci transformou o problema da quadratura do círculo em outro: transformar a porção máxima do círculo em figura retilínea ou, ainda, obter a equivalência entre uma figura curvilínea (a porção máxima) e outra retilínea.

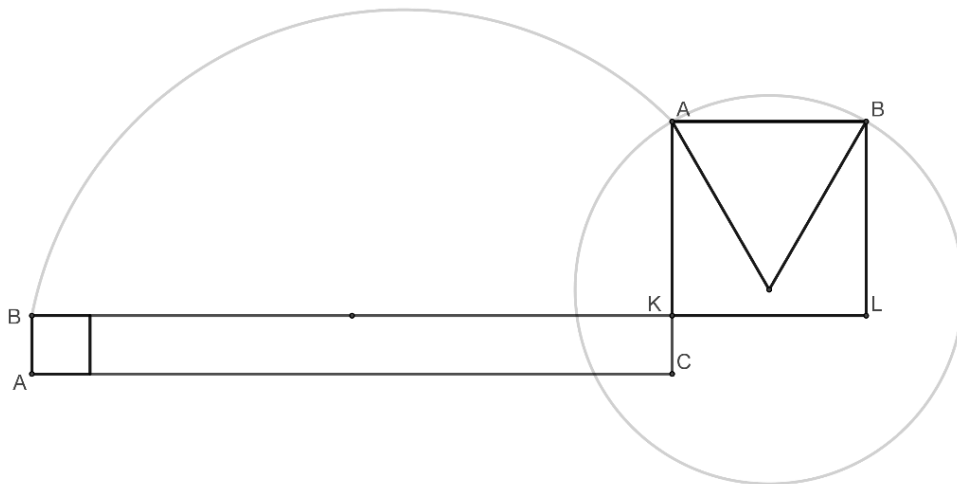
Na tentativa de resolver esse problema, Leonardo da Vinci fez a subdivisão da porção máxima em 14 porções (semelhantes entre si) que ele chamou de porções mínimas. Para isso, ele utilizou quadrado *EFMH* que, de acordo com Sánchez e Almarza (2008e, p. 230) ele nomeou de “quadrado da proporcionalidade ou tábua de proporcionalidade”. Se trata do quadrado feito sob o lado do hexágono inscrito (retratado na figura 67). O referido quadrado tem lado com medida igual ao lado do

²⁵ O hexágono pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros e estes podem ser transformados em 6 retângulos que, ao se juntarem, darão origem a um retângulo equivalente ao hexágono. Esse retângulo pode ser transformado em quadrado. Portanto, o hexágono pode ser “quadrado”, ou seja, pode ser transformado em um quadrado equivalente a ele.

hexágono, ao raio do círculo e igual à medida da corda da porção máxima. O quadrado da proporcionalidade foi dividido em 14 retângulos, mesmo número de subdivisões da porção máxima. Portanto, como o quadrado foi subdividido em 14 partes (retângulos), a porção máxima será subdividida em 14 porções mínimas. Mas como isso foi feito?

Após a subdivisão do quadrado, toma-se uma de suas 14 partes (um dos retângulos horizontais) e o transforma em quadrado, conforme o terceiro desenho da folha em estudo, retratado na figura 68. Para essa transformação, Da Vinci utilizou a proposição 14 do Livro II de *Os elementos* de Euclides já discutida neste trabalho²⁶. A figura mostra o retângulo $ABCD$ transformado no quadrado $ABKL$ esse quadrado origina um novo desenho semelhante ao primeiro desenho da folha em estudo, ou seja, o lado do quadrado $ABKL$ será tomado como raio de um círculo. Nesse círculo será inscrito um hexágono. Essa inscrição originará 6 porções semelhantes à porção máxima ESF . Cada uma das novas porções originadas (porção mínimas), equivale a 14ª parte da porção máxima, ou seja, $\frac{1}{14}$ (um quatorze avos) da área da porção máxima.

Figura 68: Folha 308v. Quadratura do retângulo



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008, p. 102).

Mas a partir de que fundamento Da Vinci poderia afirmar que essa equivalência entre as porções máxima e mínima eram verdadeiras? ele se valeu do fato de que a área do círculo é diretamente proporcional ao quadrado que tem como lado o raio do círculo. Chamemos de círculo máximo o que originou a porção máxima (figura 67) e

²⁶ A transformação do retângulo foi discutida anteriormente no estudo da folha 544.

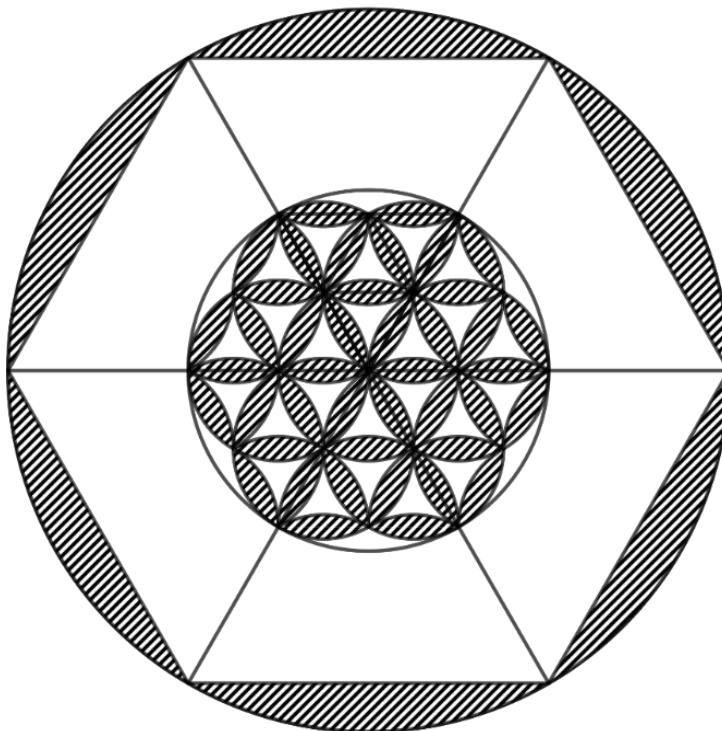
de círculo mínimo o que originou a porção mínima (figura 68). O círculo máximo tem como raio o lado do quadrado *EFMG*, esse quadrado foi subdividido em 14 retângulos e um deles *ABKC* foi transformado em quadrado, o quadrado *ABKL*. Portanto, o quadrado *ABKC* equivale a 14ª parte do quadrado *EFMG*, logo o círculo mínimo que tem como raio o lado do quadrado *ABKL* terá área equivalente a 14ª parte do círculo máximo. Da mesma forma, a porção mínima será equivalente a 14ª parte da porção máxima. Essa comprovação não foi feita por Leonardo da Vinci nessa página, mas é necessária para o entendimento do método que ele usou.

Então, se uma porção máxima equivale a 14 porções mínimas, as seis porções máximas equivalem a 6×14 , ou seja, a 84 porções mínimas o que nos leva para o 4º desenho, retratado na figura 69, que está junto a margem inferior da folha 308v (figura 66). A partir do entendimento do contexto de referência da folha, fizemos algumas modificações no desenho para que ele representasse a equivalência proposta por Da Vinci. Ele contém as seis porções máximas e as 84 porções mínimas a elas equivalentes. No desenho a região sombreada indica que as respectivas áreas são equivalentes. Mas como dispor as 84 porções mínimas no círculo máximo?

Para Da Vinci as porções mínimas poderiam ser dispostas em diferentes regiões do círculo desde que obedecidos o número de porções e a sua área. Na folha em análise, para fazer a disposição das porções mínimas em relação às porções máximas (figura 69), ele procedeu da seguinte maneira: Construiu um círculo com mesmo raio do círculo máximo. A partir do mesmo centro construiu o círculo mínimo, com raio igual ao lado do quadrado *ABKL* obtido pela transformação (figura 68).

Por essa construção, os círculos máximo e mínimo são concêntricos. Ele inscreveu um hexágono no círculo mínimo e, partir de cada um dos vértices do hexágono, traçou seis círculos com mesmo raio do círculo mínimo. Em cada um desses novos círculos inscreveu hexágonos e a partir dos seus vértices traçou novos círculo com mesmo raio e, assim sucessivamente. A intersecção desses círculos gerou as 84 porções que Da Vinci pretendia encontrar, distribuídas na parte central da figura 69. A figura 70, destaca um desenho que tem por base um dos seis triângulos equiláteros obtidos pela divisão do hexágono inscrito no círculo máximo, ou seja, esse desenho é a sexta parte do círculo máximo. Nele pode-se perceber com mais clareza a equivalência entre uma porção máxima e as 14 porções mínimas obtidas pelo procedimento que utiliza o quadrado da proporcionalidade que, nesse caso, foi subdividido em 14 retângulos equivalentes.

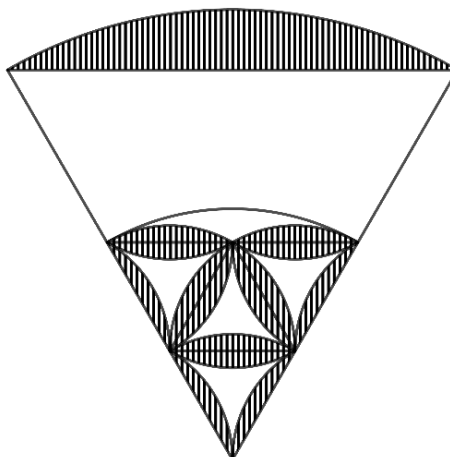
Figura 69: Folha 308v. Equivalência entre porções do círculo



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008, p. 102).

Essas porções quando organizadas no círculo máximo geram padrões geométricos que remetem a desenhos ornamentais. Esse aspecto ornamental mostra como Da Vinci conseguia transitar entre arte e geometria com excelência. Ele mobilizava as porções de círculo como se fosse um jogo e em seus escritos esse jogo é chamado de “jogo das porções” que origina desenhos “lúdico geométricos”, ou seja, que estão na fronteira do lúdico e do rigor geométrico.

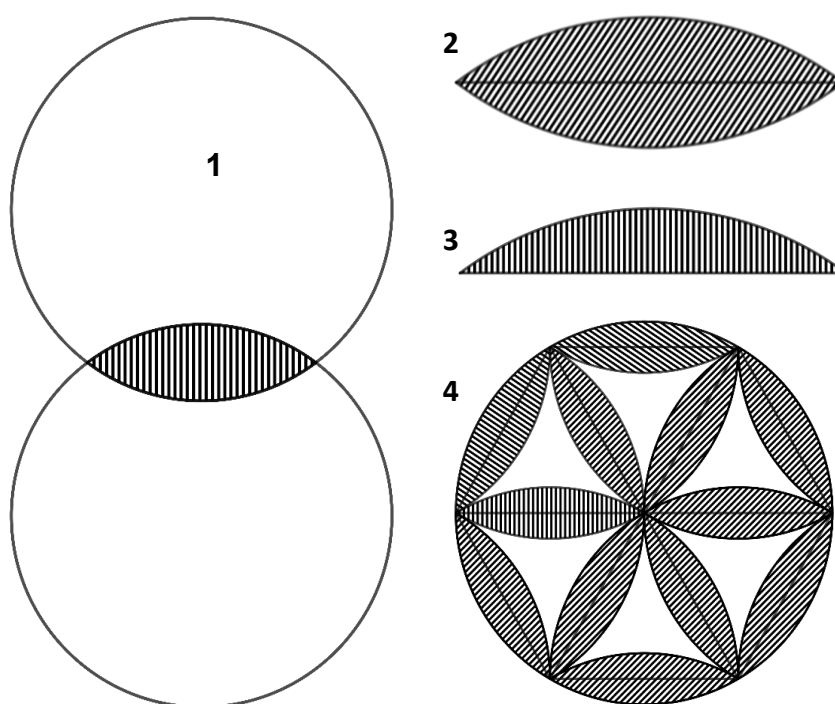
Figura 70: Folha 308v. Detalhe



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008, p. 102).

A partir de Sánchez e Almarza (2008), o procedimento base para obter os desenhos mencionados é a interseção de círculos, que gera as porções mínimas, e está retratado na figura 71. Vejamos a figura para perceber que foi dividida em 4 desenhos. A interseção de duas circunferências (desenho 1) gera uma região chamada de biângulo (desenho 2); esse biângulo tem como diâmetro horizontal o lado do hexágono que o divide em duas porções (desenho 3); 6 biângulos (12 porções) se organizam e formam uma “estrela biangular” que é a parte central do desenho 4. Biângulos, porções e estrelas biangulares são termos utilizados por Da Vinci e podem ser encontrados nos textos que ele escreveu nas folhas em estudo.

Figura 71: Folha 308v. Elaboração das porções e estrelas



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008, p. 102).

A percepção do aspecto lúdico do jogo das porções de Leonardo da Vinci são fruto do efeito emocional que o desenho (o signo) provoca em nosso pensamento e faz com que o interpretemos como algo bonito, belo o que desprende esse desenho do caráter puramente geométrico, matemático. Mas, após esse primeiro efeito, passamos a nos questionar qual o real significado desses desenhos? O que nos faz buscar informações (efeito energético) que nos auxiliem a entender o contexto dos desenhos, o seu conteúdo e os objetivos de quem o fez. Quando começamos a encontrar respostas (efeito lógico), ou seja, a interpretar de fato o significado dos

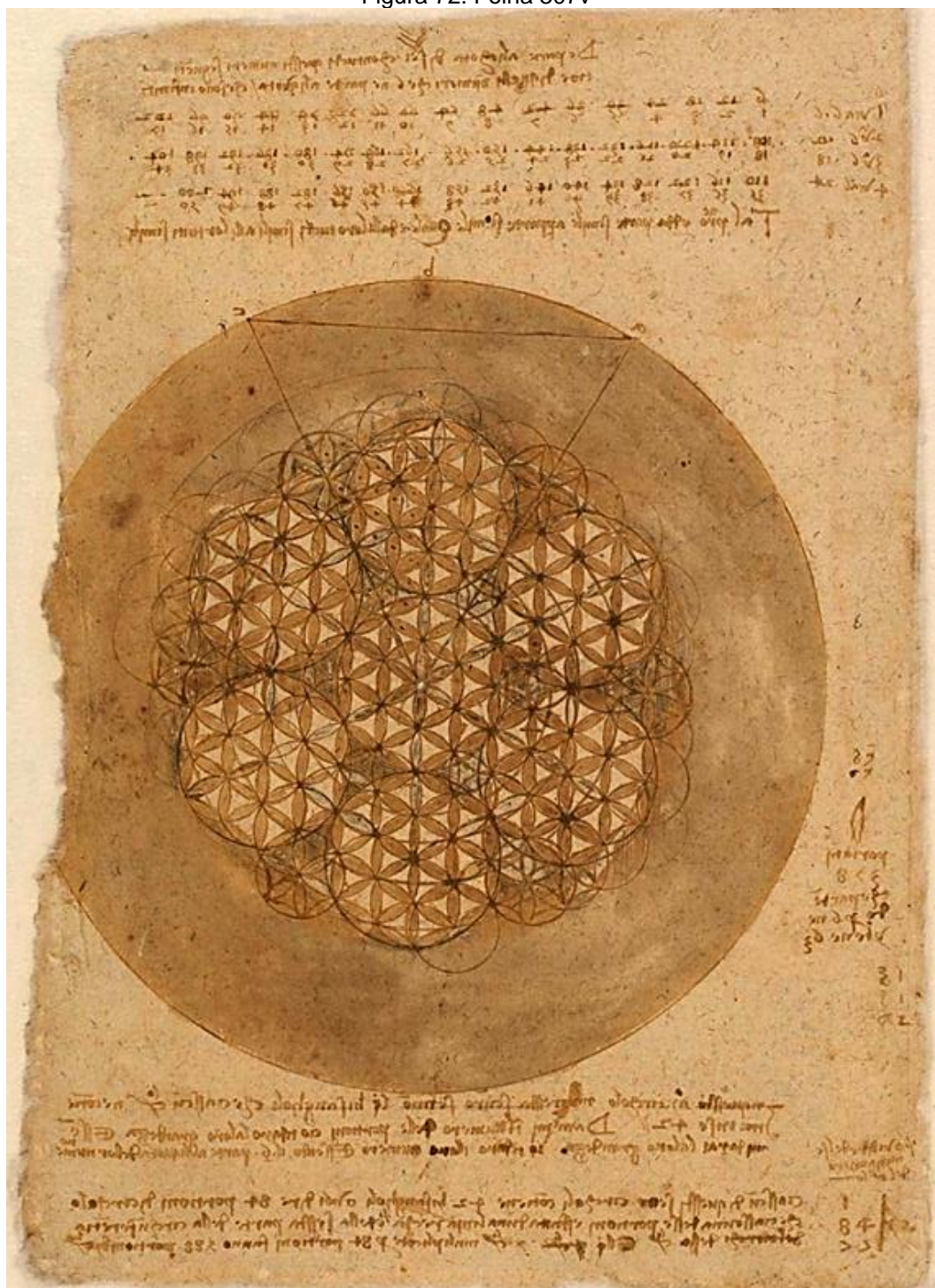
desenhos, passamos a conhecer o objeto a que se referem. Se trata de uma nova tentativa de Leonardo da Vinci de solucionar o problema da quadratura do círculo por meio da busca da equivalência entre porções do círculo.

Podemos dizer que a folha 308 tem como campo de referência a geometria pois ela trata do problema da quadratura do círculo que, por sua vez, é o seu objeto dinâmico. Mas esse objeto (o problema) comporta em seu contexto objetos da geometria que foram mobilizados por Da Vinci em suas experimentações e tentativas de solução. Dentre esses objetos estão: quadrado, retângulo, hexágono, circunferência, círculo, semicírculo, triângulo; os elementos que os compõem, centro, raio, diâmetro, altura, lado, diagonal; relações entre eles, inscrição, equivalência, proporcionalidade; e grandezas a elas relacionadas, área, perímetro etc. Então, a folha 308 contém objetos geométricos (quadrado, retângulo...), mobilizados no problema da quadratura, que faz parte do campo da geometria e essa classificação é o que confere à folha a propriedade da lei do *legissigno* simbólico.

Concluir que a folha 308 se insere no contexto descrito, seu campo de referência, só foi possível, por ela ter provocado, em nosso pensamento, efeitos emocionais, energéticos e lógicos, este último, materializado pelos estudos que fizemos na fronteira do campo de referência da folha, ou seja, pela experiência colateral que tivemos com esse campo. Essa experiência culminou com a formulação da regra interpretativa, composta pelos conhecimentos que já possuíamos e pelos novos conhecimentos que adquirimos por meio da experiência colateral. Dessa forma, o texto no qual discorremos sobre a folha 308, é o resultado de todo esse processo ocorrido no nosso pensamento que foi o processo de significação da folha 308, a *semiose*.

A *semiose* ocorrida a partir dos efeitos da folha 308, mostrou que um dos aspectos relevantes da folha é o caráter lúdico e ornamental que compõem a linguagem geométrica singular da folha. Esse caráter provocou, principalmente, efeitos emocionais e energéticos os quais nos impulsionaram e nos estimularam a buscar informações sobre os objetos de referência da folha. Esses mesmos efeitos ocorreram, quando observamos a folha 307v na qual o aspecto lúdico e ornamental é, ainda, mais perceptível. Nessa folha, que está no volume 5 do *Códice Atlântico* estudado (figura 72), Da Vinci conecta o rigor geométrico à arte, uma vez que, “a partir de problemas puramente geométricos, chega a soluções de grande valor artístico” (NAVONI, 2012, p. 168).

Figura 72: Folha 307v



Fonte: Sánchez e Almarza (2008e, p. 100).

A exemplo do que fez na folha 308, na folha 307, Da Vinci prossegue com o jogo das porções de círculo para estabelecer proporcionalidades entre elas. Para tanto, ele anota na parte superior da folha os primeiros 50 múltiplos de seis, pois sua intenção é encontrar as porções mínimas proporcionais às 6 porções máximas obtidas pela inscrição do hexágono, ou seja, Da Vinci objetivava “decompor a porção máxima

num número de porções mínimas que fosse múltiplo de 6” (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008e, p. 231)

A folha contém uma circunferência maior com um triângulo equilátero interno a ela, que parte do centro a vai até a parte superior, e determina a porção máxima identificada pelos pontos ABC. Esse triângulo é um dos seis originados pela inscrição do hexágono que, nesse desenho não foi concluída. Interno à circunferência maior, há um grupo de circunferências menores que se intercedem e formam estrelas biangulares que conferem um aspecto ornamental ao desenho. O número de estrelas é tamanho que dificulta a identificação e delimitação das circunferências. Porém, é possível identificar 7 círculos que se destacam: um no centro e seis à sua volta, todos tangentes entre si, formando uma espécie de coroa (NAVONI, 2012; SANCHÉZ; ALMARZA, 2008e).

Cada um desses 7 círculos contém 84 porções mínimas (42 biângulos) que totalizam 588 porções ($7 \times 84 = 588$). Se a intenção de Da Vinci era de fato decompor a porção máxima e, como o número de porções mínimas obtidas foi 588, a proporcionalidade estabelecida foi de 1:98 (1 para 98) já que a divisão de 588 por 6 resulta em 98 ($588:6 = 98$). Da Vinci não insere, nessa folha, o quadrado da proporcionalidade, o que pode ter feito em outra folha. No entanto ele evidencia parte do método para obter a proporcionalidade entre as porções quando escreve “Dê-me o número de porções e darei o seu tamanho. E se você me der a grandeza delas, eu darei a você o número delas, sendo 6 a parte alíquota do seu número”²⁷ (SANCHÉZ; ALMARZA, 2008e, p. 232).

Para nós, esse texto de Da Vinci remete a generalizações que ele obtinha a partir dos seus estudos experimentais, pois ele experimentava de forma excessiva antes de concluir algo sobre essas experiências. Nesse texto ele faz uma generalização que relaciona o número de porções e sua grandeza (que entendemos ser suas dimensões) o que depende da “parte alíquota”, que, em nosso entendimento, é o número de porções máximas, nesse caso 6. Então se se conhece o número de porções é possível determinar suas dimensões, por outro lado, conhecidas as dimensões de cada porção, pode-se determinar o seu número, ou seja, a quantidade de porções mínimas a serem construídas de modo a atender à proporcionalidade pretendida.

²⁷ Dammi il numero delle porzioni e io ti darò la loro grandezza. E se mi darai la loro grandezza, io ti darò il loro numero, essendo il 6 parte aliquota del lor numero.

O termo “parte alíquota” define o ponto de partida do método de demonstração, pois como já discutimos anteriormente: as porções mínimas são obtidas pela intersecção de dois círculos mínimos que gera um biângulo (duas porções mínimas); os círculos mínimos dependem do tamanho do seu raio; tal raio é o lado do quadrado que foi obtido pela quadratura de um dos retângulos que compõem o quadrado da proporcionalidade; o quadrado da proporcionalidade tem lado de mesma medida do lado do hexágono inscrito no círculo máximo; e essa inscrição gerou as 6 porções máximas; e 6 é a parte alíquota que vai determinar o número de porções mínimas que, por fim, será um de seus múltiplos, como de fato ocorreu nas folhas 308v, cuja subdivisão originou 84 porções, e na folha 307v na qual foram originadas 588 porções mínimas, ou seja, em ambas o número de porções mínimas é múltiplo de 6 que é o número de porções máximas chamado de parte alíquota por Da Vinci ($6 \times 14 = 84$ e $6 \times 98 = 588$).

Além da relação entre as porções, outra é evidenciada na folha em estudo, pois a descrição da folha menciona que a superfície do círculo maior poderá ser o dobro da superfície do círculo, a ele concêntrico, e que contém os 7 círculos destacados anteriormente, (com 84 porções cada um). Esses dois círculos concêntricos, determinam a coroa circular que está pintada com cor marrom mais escura, mesma cor das porções mínimas. Dessa forma, poderá ser estabelecida uma relação entre essas circunferências a partir do círculo mínimo. Vejamos:

A partir do desenho, consideremos 4 círculos (C_1, C_2, C_3 e C_4) e as relações que podem ser estabelecidas entre eles. Partiremos do princípio de que três destes círculos (internos ao máximo) têm como base a porção mínima, cuja corda é o raio da circunferência mínima, com já é sabido. Vejamos as relações.

C_1 = Círculo mínimo com 24 porções. Consideremos o seu raio igual a R , logo sua área será $S_1 = \pi R^2$;

C_2 = Um dos 7 círculos que contem 84 porções. Pelo desenho é possível verificar que o raio deste círculo equivale ao dobro do raio de C_1 , ou seja, $R_2 = 2R$, logo, $S_2 = \pi R_2^2 = \pi(2R)^2 = 4\pi R^2$. O que nos leva a concluir que $S_2 = 4\pi R^2$;

C_3 = Círculo que contém os 7 círculos C_2 e as 588 porções. Pelo desenho raio deste círculo é o sêxtuplo do raio do círculo mínimo, ou seja, $R_3 = 6R$. Logo sua área será: $S_3 = \pi R_3^2 = \pi(6R)^2 = 36\pi R^2$, o que nos leva a concluir que $S_3 = 36\pi R^2$;

C_4 = Círculo máximo. As relações anteriores podem ser confirmadas por meio da observação do desenho que mostra a corda da porção mínima como o raio menor R . No entanto, no que se refere ao círculo máximo, a coroa circular representa uma lacuna de espaço que impossibilita tal relação entre a relação entre R_4 e R . Então, partiremos do princípio de que C_4 tem como área o dobro da área de C_3 , ou seja, $S_4 = 2S_3$, mas para isso, $\pi R_4^2 = 2\pi R_3^2$, cancelando π nos dois membros da equação e extraindo a raiz quadrada de ambos chegaremos a $R_4 = R_3\sqrt{2}$. Mas $R_3 = 6R$. Logo: $R_4 = 6R\sqrt{2}$. Dessa forma a área do círculo máximo seria: $S_4 = \pi R_4^2 = \pi (6R\sqrt{2})^2 = 72\pi R^2$. Assim, $S_4 = 72\pi R^2$, o que está de acordo com a suposição inicial de que $S_4 = 2S_3$, já que $S_3 = 36\pi R^2$.

A partir do estudo que fizemos sobre a folha, entendemos que é possível verificar se as áreas de S_4 e S_3 se relacionam na razão de 1:2, o que poderia ser feito partindo-se do quadrado da proporcionalidade do qual se originou o raio do círculo mínimo, que chamamos de R , no entanto, com vistas ao objetivo do estabelecimento de relações dos signos da folha em estudo com a os objetos da geometria escolar, o estudo da folha 307r feito até aqui, já é o suficiente. Outrossim, outros estudos serão feitos a partir desta pesquisa doutoral e esse e outros aspectos poderão ser explorados.

Com vistas ao alcance desse objetivo, faremos algumas relações dos objetos mobilizados por Da Vinci com os objetos de aprendizagem em geometria do Ensino Médio, pois o currículo e os livros didáticos dos três anos desse nível de ensino, contém objetos que são equivalentes ou semelhantes aos que foram mobilizados por Da Vinci em seus estudos. Como exemplo, podemos destacar o estudo da área de figuras planas, a trigonometria do círculo e a geometria da circunferência.

O primeiro ano do Ensino Médio foca de maneira mais específica objetos que se relacionam aos objetos de referência das folhas que tratam da quadratura do círculo, pois segundo o Programa Nacional do Livro Didático, o livro didático desse ano tem como conteúdo o estudo da circunferência, círculo e a medição de áreas de polígono. De forma mais específica esse conteúdo se refere a: arcos, cordas, posição entre circunferências, posição entre reta e circunferência, perímetro da circunferência e área do círculo, área do segmento de círculo, área da coroa circular, área do retângulo, área do quadrado, área do paralelogramo, área do triângulo, área do hexágono regular, área do trapézio e área do losango.

Esses objetos da geometria escolar podem ser estudados, a partir da discussão de folhas do Códice Atlântico que tratam da quadratura do círculo como as folhas 308 e 307, pois, nessas folhas, é possível identificar objetos geométricos que são os mesmos objetos da geometria escolar como, por exemplo, círculo e circunferência, área do círculo, área do segmento de círculo, área do hexágono regular, do triângulo, do quadrado e do retângulo. Tomemos como exemplo o objeto da geometria escolar *segmento de círculo* que é obtido pelo traçado de uma corda.

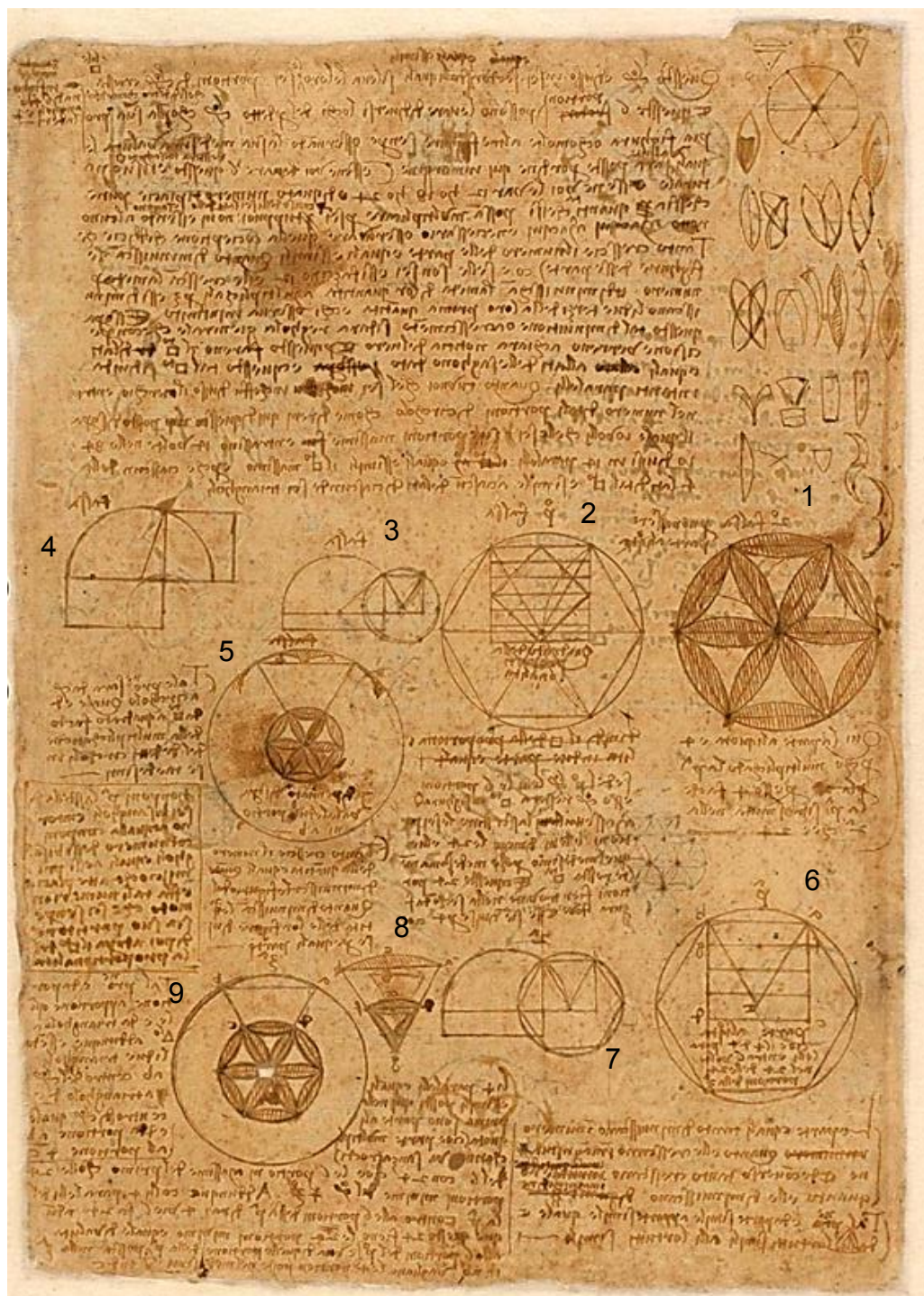
Quando se traça uma corda em um círculo, este é dividido em duas partes. Cada uma delas é um segmento de círculo que pode ser maior, igual ou menor que um semicírculo que, por sua vez, equivale à metade da área do círculo. Então o segmento de círculo é uma porção do círculo e, por isso, sua área pode se relacionar proporcionalmente a do círculo. Mas relações de proporcionalidade entre porções do círculo e o círculo ou entre porções do círculo (entre si) é o que Leonardo da Vinci toma como base para fazer seus experimentos sobre quadratura do círculo. Portanto o objeto *segmento de círculo* mobilizado por Da Vinci é o mesmo objeto estudado pela geometria escolar, a exemplo dos demais mencionados.

Nos outros dois anos do Ensino Médio (segundo e terceiro), os objetos da geometria são semelhantes aos mobilizados por Da Vinci, pois estão presentes, de forma indireta, nos conteúdos dos livros didáticos desses anos. O livro do segundo ano contém o estudo da trigonometria no triângulo retângulo e da circunferência trigonométrica e o livro do terceiro ano, a geometria analítica da circunferência, que pode ser entendida como o estudo da circunferência, do círculo e todos os seus elementos no plano cartesiano. Assim, nesses anos, mesmo que os objetos triângulo, círculo e circunferência não sejam objeto de estudo, a trigonometria e a geometria analítica, mobilizam esses objetos, que estão refletidos nas folhas do Códice Atlântico.

Um outro objeto que foi mobilizado por Da Vinci em seus estudos foi o quadrado da proporcionalidade tomado por ele como uma regra geral para operar a quadratura do círculo por meio da inscrição do hexágono. É partir dele que será desenvolvido o processo de subdivisão da porção máxima, pois o número de subdivisões desejadas (o número de partes da porção máxima) será obtido, partindo-se da subdivisão do retângulo. Segundo Leonardo da Vinci, esse número pode ser outro, como vimos nos exemplos anteriores e, inclusive, tender ao infinito. Para confirmar o caráter experimental dos desenhos de Da Vinci, tomemos a folha 297v (figura 73) na qual há

duas tentativas relacionadas à proporcionalidade entre porções de círculo. Identificamos os principais desenhos das folhas com os números de 1 a 9.

Figura 73: Folha 297v



Fonte: Sánchez e Almarza (2008e, p. 80).

Na folha há dois outros exemplos do uso do quadrado da proporcionalidade por Da Vinci. Na parte central, é possível ver 5 desenhos. O desenho 2 retrata o quadrado

da proporcionalidade dividido em 6 partes. Essa parte sugere que, nessa tentativa de demonstração, Da Vinci pretendia dividir cada porção máxima em seis partes. Tal divisão originaria 36 porções mínimas ($6 \times 6 = 36$). Prosseguindo com seu método, nos desenhos 3 e 4, Da Vinci tentou fazer a quadratura de um dos retângulos originados da divisão do quadrado da proporcionalidade e, nos dois desenhos com estrelas biangulares, 1 e 5, ele iniciou a disposição das 36 porções mínimas.

O desenho 1, apesar de ter tamanho aproximado do que contém o quadrado da proporcionalidade, representa o círculo mínimo que foi ampliado. Porém, ele não contém todas as 36 porções mínimas, contém, somente 24. Por isso, Da Vinci fez outro desenho (5), no qual o círculo mínimo está no centro (com as 24 porções) e junto a circunferência maior, ele inicia a disposição das demais porções mínimas, processo que não finalizou. Ele interrompeu a demonstração, e passou à uma segunda tentativa, que está retratada pelos 4 desenhos da parte inferior.

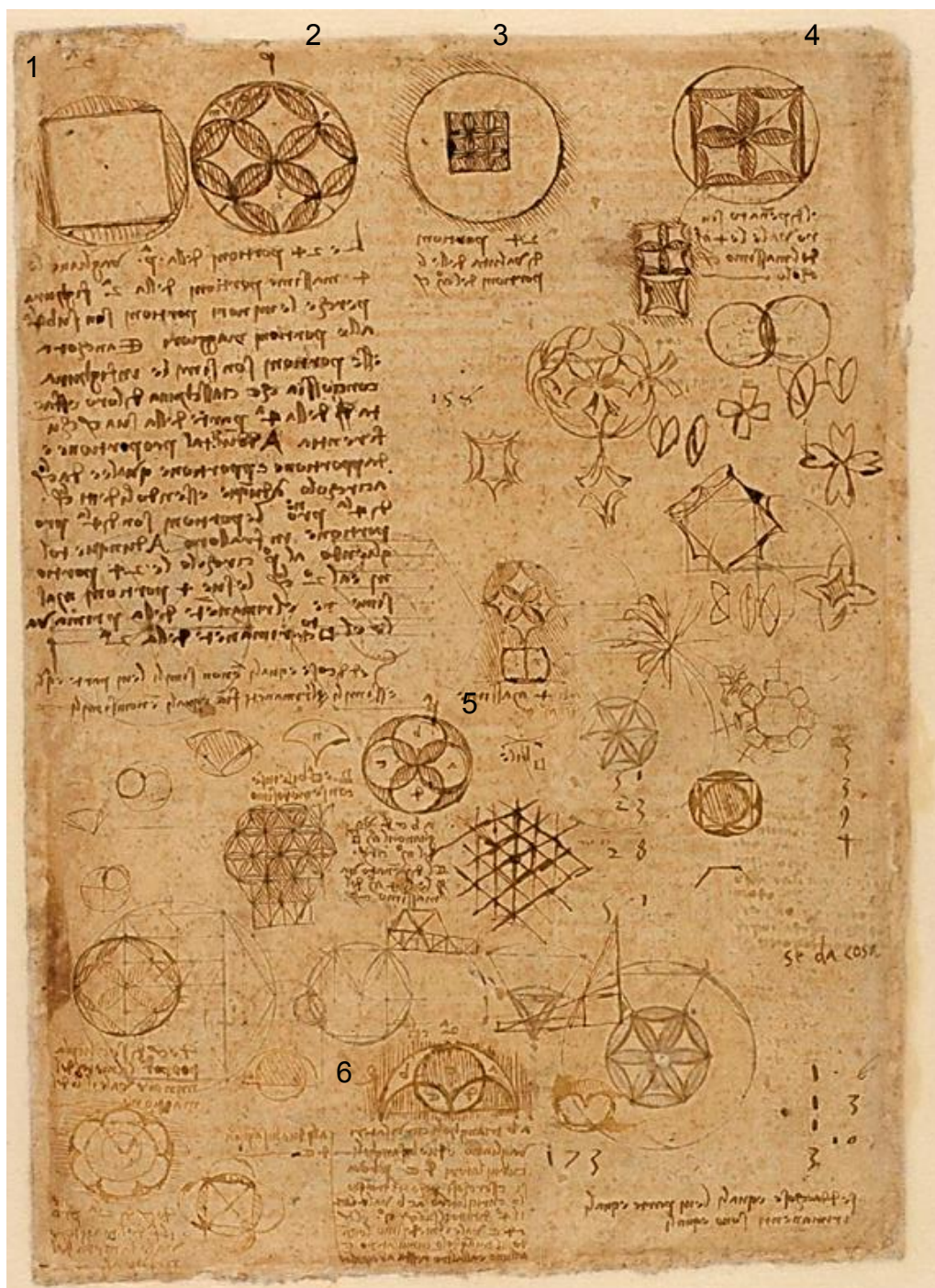
Da Vinci constrói o quadrado da proporcionalidade e, agora, o divide em 4 retângulos (desenho 6). Ele quadra um desses retângulos (desenho 7), encontra o raio do círculo mínimo e determina a porção mínima. Como a divisão foi em 4 retângulos, a porção máxima será equivalente a 4 porções mínimas, totalizando 24 porções mínimas ($6 \times 4 = 24$). Na sequência ele constrói o círculo máximo e o círculo mínimo a ele concêntrico, dispõe as 24 porções (desenho 9), e desenha o detalhe que evidencia a equivalência de 1 para 4 porções máxima e mínimas (desenho 8).

A partir do estudo da folha, é possível inferirmos que o objetivo de Da Vinci nessa folha era construir o desenho 1, que tem um aspecto floral, artístico. Mas como fazê-lo a partir da equivalência entre porções do círculo? Como justificar geometricamente essa criação artística? Leonardo tentou primeiro com a divisão da porção máxima em 6 partes, e não deu certo. Então, ele tentou com a divisão em 4 partes e conseguiu. Essas tentativas ilustram o caráter experimental desses desenhos e anotações que tratam do uso do quadrado da proporcionalidade como método na busca soluções para problema da quadratura do círculo.

Além da inscrição do hexágono, ele buscou a equivalência entre porções do círculo pela inscrição de outros polígonos? Sim! Leonardo da Vinci buscou essa equivalência pela inscrição do triângulo, quadrado, pentágono, octógono, pela circunscrição desses polígonos ao círculo, além de experimentar outros métodos como as lúnulas e a quadratura das falcatas que eram triângulos cujos lados eram curvos e não retos. Uma dessas tentativas encontra-se na folha 297r (figura 74), na

qual Da Vinci trata da equivalência entre porções do círculo pela inscrição do quadrado no círculo.

Figura 74: Folha 297r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008e, p. 79).

Na parte superior da folha há 4 desenhos que retratam a equivalência pretendida. Da esquerda para a direita, o desenho 1, contém um quadrado inscrito em um círculo e as 4 porções máximas geradas por essa inscrição (região sombreada); o desenho 2 contém 24 porções mínimas organizadas em 4 círculos internos ao círculo

máximo; o desenho 3 retrata um círculo com um quadrado interno subdividido em porções biangulares (mínimas) e o desenho 4, mostra um círculo com um quadrado inscrito e, também, subdividido em porções mínimas.

O texto de Leonardo da Vinci é um pouco confuso nessa folha. Ao lado do desenho 4 ele escreve: O pintado de escuro vale 4 máximos do círculo máximo²⁸. Para nós isso significa que a região pintada, que contém 16 porções de círculo (mínimas), equivale às 4 porções máximas originadas na inscrição do quadrado. Abaixo do desenho 3 ele escreve: 24 porções de valor das 6 porções do círculo maior²⁹. Esse trecho lembra a equivalência obtida pela inscrição do hexágono; e abaixo dos desenhos 1 e 2 ele escreve: “As 24 porções da primeira tela são as 4 porções máximas da segunda figura, porque as porções menores são subquádruplas em relação às porções máximas”³⁰. Bom, se as porções menores são, cada uma, a quarta parte das maiores, 4 porções maiores equivalem a 16 porções menores, ou seja, cada porção máxima equivale a 4 porções mínimas, como ele afirmou abaixo do desenho 4 “O pintado de escuro vale 4 máximos do círculo máximo” (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008e, p. 211-212).

Como na folha 297v Da Vinci fez a proporcionalidade pela inscrição do hexágono e na 297r misturou resultados tanto dessa inscrição como da inscrição do quadrado, é provável que ele estivesse experimentando uma correlação entre o método pela inscrição do quadrado com o aquele no qual inscreve o hexágono no círculo máximo, pois é nesse último em que as seis porções máximas podem equivaler a 24 porções mínimas, como já discutimos no estudo da folha 297v. Mas como Da Vinci obteve as porções mínimas pela inscrição do quadrado?

Na figura 75, o desenho da esquerda retrata a inscrição do quadrado no círculo máximo que gera 4 porções máximas como a que está sombreada. Se forem inseridos 4 círculos internos ao círculo máximo de forma que o raio desse círculo seja a metade do raio do círculo máximo e todos tangentes ao centro do círculo como no desenho da esquerda, serão obtidas 16 porções de círculo menores que a máxima, ou seja, as porções mínimas. Mas qual a relação entre a porção máxima e as porções mínimas?

²⁸ El dipennato scuro vale le 4 massime del massimo circolo.

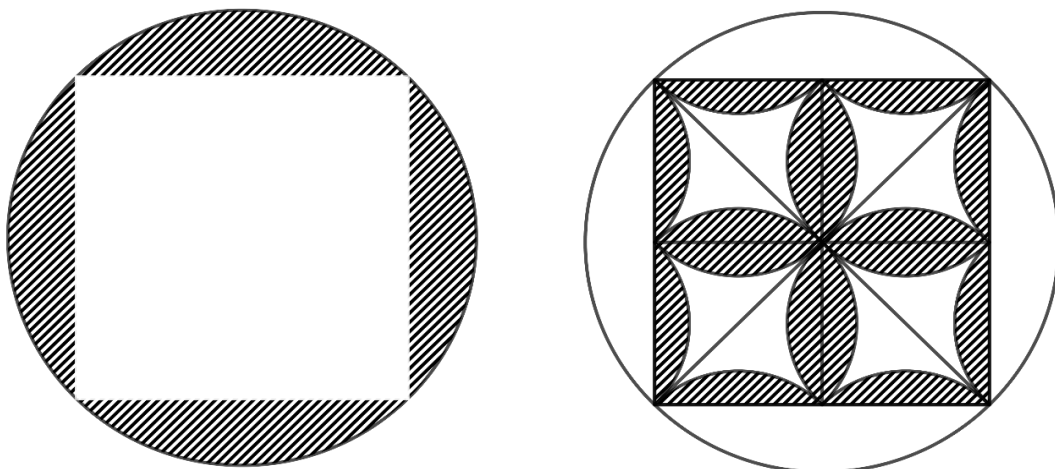
²⁹ 24 porzioni di valuta delle 6 porzioni del massimo circolo.

³⁰ Le 24 porzioni della prima vagliano le 4 massime porzioni della seconda figura, perché le minori porzioni son subquadruple alle porzioni maggiori.

Se o círculo menor tem metade do raio do círculo máximo, as suas áreas são proporcionais, na razão de 1:4. Vejamos! Seja R o raio do círculo máximo e r o raio do círculo menor. Pelo desenho é possível perceber que $R = 2r$, então, a área do círculo máximo (1) que é $S_1 = \pi R^2$, será $S_1 = \pi(2r)^2$, $S_1 = 4\pi r^2$. Mas a área do círculo menor (2) é $S_2 = \pi r^2$. Portanto, $S_1 = 4S_2$ ou $S_2 = \frac{S_1}{4}$.

A proporção entre as áreas totais dos círculos será mantida para suas porções. Assim, a inscrição do quadrado no círculo mínimo irá gerar quatro porções e cada uma dessas porções será a quarta parte da porção gerada pela inscrição do quadrado no círculo máximo. Portanto, a porção máxima será equivalente a 4 porções mínimas, e as 4 porções máximas serão equivalentes às 16 porções mínimas. Essa equivalência foi retratada por Da Vinci nos desenhos 1 e 4 da folha 297r (figura 74), desenhos que refizemos e estão na figura 75. Nessa figura as áreas sombreadas são equivalentes.

Figura 75: Porções originadas pela inscrição do quadrado

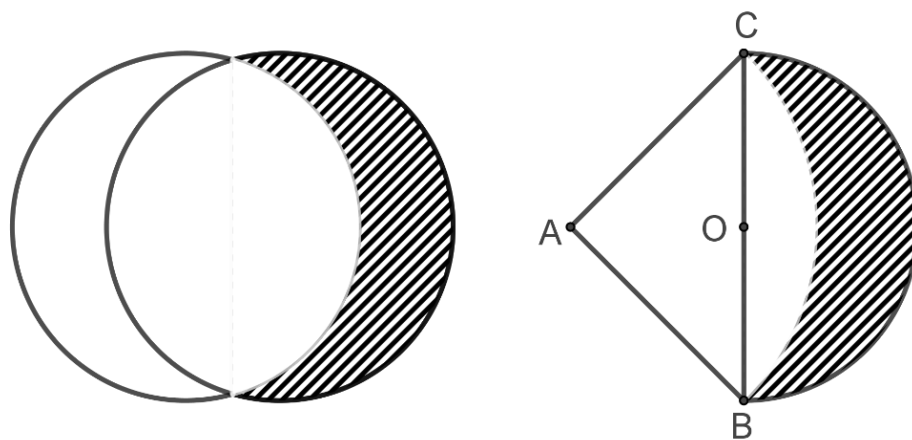


Fonte: Elaborado a partir Sánchez e Almarza (2008e, p. 79).

Outro método que Da Vinci utilizou em suas tentativas de obter a quadratura do círculo foi a quadratura das lúnulas, que podem ser obtidas pela sobreposição de dois círculos de centros distintos e que têm somente dois pontos em comum. As lúnulas são as regiões limitadas pelos arcos das circunferências e podem ser relacionadas aos polígonos inscritos nos círculos que as originam. Na figura 76, o desenho da esquerda mostra a sobreposição de dois círculos que origina duas lúnulas e, à direita, a sobreposição dos semicírculos de raios OC e AC, origina uma lúnula, apenas, que é a região convexa no formato de lua, em destaque.

O estudo das lúnulas teria sido feito, por primeiro, pelo geômetra grego Hipócrates de Chios (século V a.C.) que provou a equivalência entre a superfície de uma lúnula e a superfície de um triângulo, como retratado na figura 76 (à direita). Esse é considerado o primeiro método para se calcular a área exata de uma figura curva e foi enunciado por Hipócrates de seguinte forma: “quando se cria uma lúnula ao sobrepor um grande semicírculo sobre outro menor, pode-se desenhar um triângulo reto dentro do maior que terá mesma área da lúnula” (ISAACSON, 2017, p. 233).

Figura 76: Lúnulas de Hipócrates



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008).

Os estudos de Hipócrates sobre lúnulas são provenientes das tentativas de resolução do problema da quadratura do círculo, ou seja, a exemplo do que fez com o problema da duplicação do cubo³¹, Hipócrates reduziu o problema da quadratura do círculo a outro: o da quadratura de partes do círculo, as lúnulas (BICUDO, 2009; KATZ, 2010).

Além das contribuições sobre quadratura do círculo e a duplicação do cubo, Hipócrates pode ter publicado um trabalho chamado *Os Elementos de Geometria*, considerado um dos precursores dos primeiros livros de *Os elementos* de Euclides, pois Proclo em seus comentários sobre *Sumário de Eudemo* faz menção a essa publicação de Hipócrates bem como ao fato de Hipócrates ter provado a quadratura das lúnulas. A lúnula da figura 76 é semelhante a que foi estudada por Leonardo da Vinci na folha 486 (figura 77) (BICUDO, 2009; KATZ, 2010).

³¹ Hipócrates reduziu o problema da duplicação do cubo ao problema de encontrar as médias proporcionais, como já discutimos neste trabalho.

Figura 77: Folha 486r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008h, p. 133).

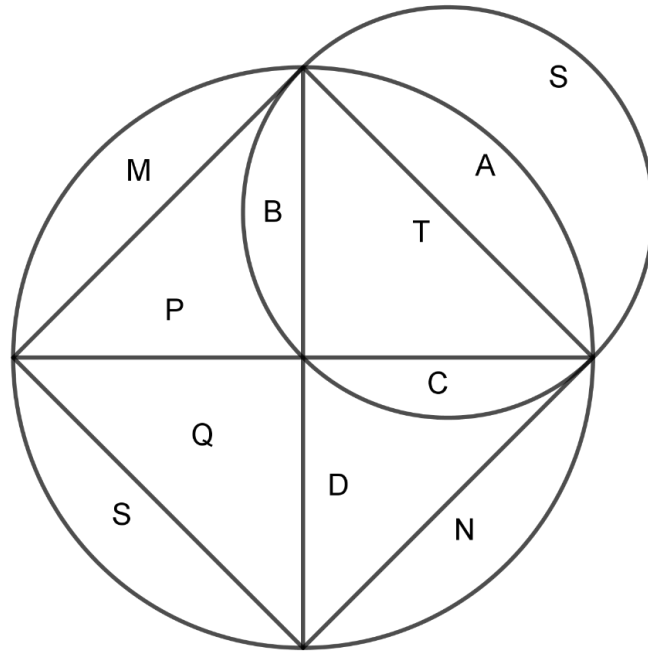
A folha 486r contém alguns desenhos geométricos dentre os quais se destaca o desenho maior na parte superior. Esse desenho tem como base uma circunferência com um quadrado inscrito, cujas diagonais estão traçadas. Tangente ao centro desse círculo, é traçada outra circunferência que tem diâmetro igual à medida do lado do quadrado inscrito. O desenho origina algumas porções de círculo dentre elas uma região curva, externa à circunferência maior, que é uma lúnula, como a de Hipócrates retratada na figura 76 (anterior) (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 274).

Leonardo da Vinci “aparentemente tomou conhecimento da Lúnula de Hipócrates por um compêndio de Giorgio Valla, publicado em Veneza, 1501, e fez uso frequente da igualdade em várias formas”³² (CAPRA, 2012, p. 275). Dentre seus estudos sobre o tema, alguns estão no Códice Atlântico que contém folhas com

³² Essa informação nos leva a inferir que se trata do *De expetendis et fugiendis rebus opus* de Giorgio Valla, que mencionamos anteriormente.

desenhos e anotações de Da Vinci que tratam dessas lúnulas a exemplo das folhas 259, 325, 368, 389, 389, 394 e 486, esta última analisada neste texto. Destacamos o desenho em maior da folha 486, na figura 78.

Figura 78: Desenho principal da folha 486r



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008h, p. 133).

A partir do texto de Leonardo da Vinci contido na folha, descrevemos a nossa interpretação do método que ele usou para provar a quadratura da Lúnula. Leonardo da Vinci traçou primeiro a circunferência menor (mínima) e a partir dela a maior (máxima) de forma que a proporcionalidade entre as superfícies dos dois círculos fosse de 1:2 (uma o dobro da outra). Em seguida ele inscreveu um quadrado na circunferência máxima, dividindo-o em 4 triângulos retângulos (P, T, Q, D), um dos quais (T) está inscrito na circunferência mínima (SÁNCHEZ; ALMARZA, p. 274).

A inscrição dos polígonos mencionados gerou quatro porções máximas (M, N, A, R) e duas porções mínimas (B, C). A interseção das circunferências originou uma região comum a elas (que é a soma das superfícies A, T, B, C) e a lúnula S ³³. Como as superfícies dos círculos, máximo e mínimo, estão na razão de 1:2, da mesma forma, as porções máxima e mínima estarão, ou seja, uma porção máxima

³³ Na realidade duas lúnulas como mostramos na figura 77. Porém, nosso estudo foca a somente a lúnula S que foi a estudada por Da Vinci na folha 486r.

equivale a duas porções mínimas. Mas como Da Vinci provou a equivalência proposta? (SÁNCHEZ; ALMARZA, p. 274).

Chamemos de C_1 o círculo mínimo e de C_2 o círculo máximo. Pela figura x é possível verificar que $C_1 = A + B + C + T + S$, mas duas porções mínimas equivalem a uma máxima, ou seja, $B + C = A$ então, $C_1 = A + A + T + S$, $C_1 = 2A + T + S$. Por sua vez $C_2 = A + M + N + R + T + P + Q + O$, mas como as porções máximas são todas equivalentes $A + M + N + R + T = 4A$ da mesma forma $R + T + P + Q + O = 4T$ o que nos leva a concluir que $C_2 = 4A + 4T$. Como sabemos $C_2 = 2C_1$ que resulta em $4A + 4T = 2(2A + T + S) \rightarrow 2A + 2T = 2A + T + S \rightarrow 2A - 2A + 2T - T = S \rightarrow T = S$. Portanto, a superfície da lúnula S é equivalente a superfície do triângulo T.

Como já mencionamos neste trabalho, Da Vinci, em suas demonstrações, se valia do desenho e relacionava suas partes por meio de outros desenhos ou por meio da escrita. No caso da folha em estudo, ele relacionou as superfícies que compõem as circunferências por meio de uma argumentação escrita. Após interpretarmos a escrita, representamos as relações por meio das equações a partir do texto de Da Vinci apoiados no desenho. Questionamos, então, as superfícies dos círculos estão na razão 1:2? A lúnula S foi quadrada?

Para que as superfícies dos círculos estejam na razão 1:2, $C_2 = 2C_1$, seus raios devem se relacionar de forma que $R_2 = R_1\sqrt{2}$, como já foi provado anteriormente. Pelo desenho, o triângulo retângulo inscrito no círculo mínimo tem como *catetos* lados de mesma medida iguais ao raio do círculo máximo R_2 , por sua vez, a *hipotenusa* é o diâmetro do círculo mínimo, ou seja, $2R_1$. Pelo Teorema de Pitágoras, *o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*. Assim, $(2R_1)^2 = R_2^2 + R_2^2 \rightarrow 4R_1^2 = 2R_2^2 \rightarrow 2R_1^2 = R_2^2 \rightarrow R_2 = \sqrt{2R_1^2} \rightarrow R_2 = R_1\sqrt{2}$. Leonardo da Vinci não demonstrou tal relação nessa folha, ele partiu do princípio de que tal relação era verdadeira, pois deve ter a demonstrado em outra folha ou tomado como base algum estudo no qual ela já estava provada.

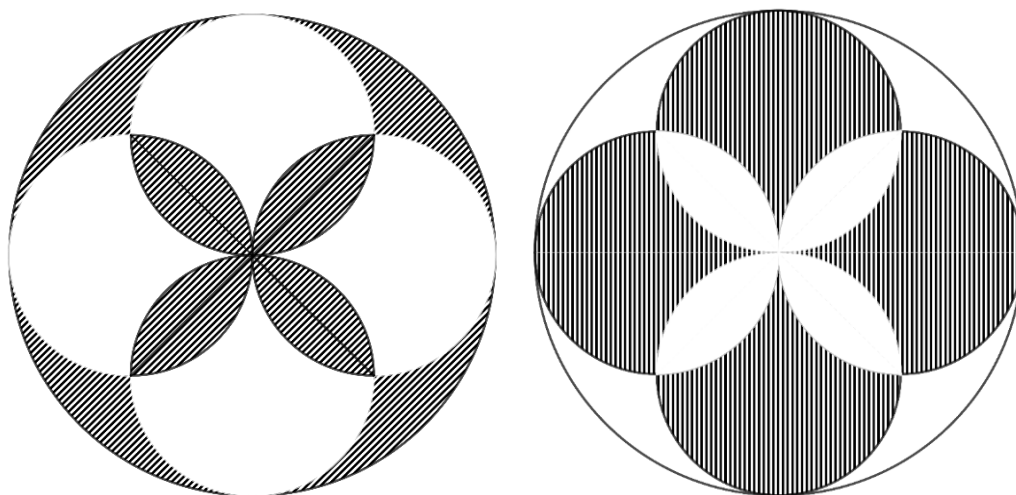
Quanto a quadratura da lúnula, o procedimento de Da Vinci não prossegue com a transformação do triângulo em quadrado porque desde os gregos, sabe-se que toda superfície plana em formato de polígono pode ser *quadrada*. No caso do triângulo em estudo, se for traçada a sua altura em relação à hipotenusa, ela o dividirá em dois triângulos retângulos que, por sua vez, poderão formar um quadrado (E) cujo lado é o raio do círculo menor R_1 . Como a superfície da lúnula S é equivalente à do triângulo

T e a superfície de T é equivalente à do quadrado E , a superfície de S é equivalente à superfície do quadrado T .

No estudo das folhas sobre quadratura do círculo que fizemos até este ponto, estabelecemos, algumas correlações entre o conteúdo das folhas estudadas. No entanto, nem sempre é possível afirmar alguns aspectos destacados no estudo, pois não há como precisar a cronologia da feitura das folhas e nem as correlações exatas entre elas, pois Pompeu Leoni não observou esses critérios na montagem do Velho Códice Atlântico e talvez nem ele teve acesso a tais informações. De outro modo, nosso foco nesta análise não é saber exatamente o que Da Vinci pretendia com cada um dos desenhos e anotações contidos nas folhas estudadas e sim problematizá-los para que daí surjam dados, informações que favoreçam o estabelecimento de relações com os objetos da geometria escolar.

Visando esse objetivo, passaremos a estabelecer algumas das relações mencionadas. Para isso, retomaremos a folha 297r (figura 74) discutida anteriormente. Nessa folha identificamos seis desenhos e, aqui estudaremos os desenhos 5 e 6 (figura 79) que, como os outros da folha, tratam da equivalência entre porções do círculo. Já mostramos algumas relações entre o círculo máximo e o mínimo, no entanto, ainda há o que explorar, como por exemplo, o fato que os círculos mínimos poderão ser dispostos de formas diferentes no interior do círculo máximo. Esses círculos mínimos terão sempre o mesmo diâmetro e, esse diâmetro, será igual ao raio do círculo máximo, como já foi destacado.

Figura 79: Equivalência entre porções do círculo



Fonte: Elaborado a partir Sánchez e Almarza (2008e, p. 79).

Como já estabelecemos algumas relações entre as áreas dos círculos máximo e mínimo e, conseqüentemente entre os seus raios e diâmetros, focaremos o aspecto aqui o aspecto lúdico dos desenhos e a possibilidade de manipulação dos círculos mínimos de forma a obter a equivalência entre as áreas das porções de círculo. Nos dois círculos da figura 79 Leonardo da Vinci organizou os círculos mínimos de modo a formar uma estrela biangular no centro do círculo máximo. O desenho da esquerda e o da direita diferem, somente, pelas regiões que estão sombreadas porém, ambos são feitos pelo traçado de 4 círculos mínimos secantes entre si, tangentes ao centro do círculo máximo e ao círculo máximo. Pelo desenho, pode perceber que o diâmetro do círculo mínimo é o raio do círculo máximo.

Os dois desenhos da figura 79, são modos pelos quais Da Vinci buscou a equivalência entre porções do círculo. Como já foi discutido, o princípio para se obter as porções era a intersecção ou sobreposição parcial de círculos de modo a gerar as porções que, por sua vez se organizam em padrões geométricos que remetem ao lúdico, ao artístico. Seria possível organizar os círculos mínimos de forma diferente? A exemplo do que Da Vinci fez, pode-se experimentar outras maneiras de sobrepor o círculo em busca da equivalência estudada? Como relacionar o caráter lúdico dos desenhos de da Vinci aos objetos da geometria escolar?

De certa forma, as duas primeiras questões respondem a última, pois experimentar diferentes maneiras de sobrepor os círculos mínimos em correlação com o máximo é uma maneira de relacionar a ludicidade dos desenhos a geometria escolar. Essa relação é possível uma vez que a sobreposição é prevista no currículo do Ensino Fundamental. O 3º ano tem como objeto de conhecimento *comparação de áreas por superposição* cujo estudo visa desenvolver nos estudantes a habilidade de “Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos” (BRASIL, 2017, p. 297). Tendo em vista que os estudantes desse ano têm idade próxima dos 8 anos, o caráter lúdico e experimental poderá ser favorável ao ensino da comparação de áreas bem como ao ensino de outros objetos do conhecimento do Ensino Fundamental

Como o problema da quadratura do círculo tem como foco a medição de áreas das figuras geométricas planas círculo e quadrado e, como Leonardo da Vinci, por meio de suas experimentações e métodos aplicados e desenvolvidos, mobilizou outros polígonos como retângulo, triângulo, hexágono, por exemplo, decidimos verificar como os estudos sobre *área* estão previstos no currículo do Ensino

Fundamental. O quadro 9 contém os objetos de conhecimento da geometria, que se referem à *área* e às habilidades que podem ser desenvolvidas nos estudantes por meio do seu ensino. Observemos o quadro.

Quadro 9: O objeto área no Ensino Fundamental

Objetos de conhecimento	Habilidades
3º ANO	
Comparação de <i>áreas</i> por superposição	(EF03MA21) Comparar, visualmente ou por superposição, <i>áreas</i> de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos (p. 297)
4º ANO	
Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar <i>área</i> de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área (p. 291)
5º ANO	
Áreas e perímetros de figuras poligonais: algumas relações; Medidas de comprimento, <i>área</i> , massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, <i>área</i> , massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais (p. 295). (EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter <i>áreas</i> diferentes e que, também, figuras que têm a mesma <i>área</i> podem ter perímetros diferentes (p. 295).
6º ANO	
Problemas sobre medidas envolvendo	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo,

<p>grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, <i>área</i>, capacidade e volume</p>	<p>temperatura, <i>área</i> (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento (p. 301).</p> <p>(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na <i>área</i> de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a <i>área</i> (p. 301).</p>
7º ANO	
<p>Equivalência de <i>área</i> de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas <i>áreas</i> podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros</p>	<p>(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras <i>áreas</i> do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada (p. 307)</p> <p>(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de <i>área</i> de triângulos e de quadriláteros (p. 307).</p> <p>(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de <i>área</i> de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas (p. 307).</p>
8º ANO	
<p><i>Área</i> de figuras planas; <i>Área</i> do círculo e comprimento de sua circunferência</p>	<p>(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer <i>área</i>, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso (p. 313).</p> <p>(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de <i>área</i> de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de <i>área</i> (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos (p. 313).</p>

9º ANO	
-----	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano (p. 317).

Fonte: Elaborado a partir de Brasil (2017, pp. 286-317).

Dos nove anos do Ensino Fundamental, só não encontramos o estudo do objeto geométrico área nos dois primeiros anos o que nos leva a concluir que estudos referentes à medição de área são importantes para o Ensino fundamental. Cada um dos objetos de aprendizagem pode ser relacionado aos estudos que fizemos sobre a quadratura do círculo como já foi feito ao longo da discussão do conteúdo das folhas sobre quadratura, no entanto, descreveremos mais algumas relações a partir do quadro 9, a exemplo do que já foi feito com o conteúdo do 3º ano.

No 6º ano e no 7º ano Ensino fundamental, o currículo prevê o ensino de resolução de problemas envolvendo área de figuras planas e, como já mencionamos, medição de áreas é o foco do problema da quadratura do círculo. Talvez esse problema seja um pouco complexo para ser trabalhado nesses anos, mas um de seus aspectos poderá o ser. O quadrado da proporcionalidade, por exemplo, é um desses aspectos, pois poderiam ser formulados problemas, pelo professor, que tratassem do quadrado e da sua divisão como, por exemplo:

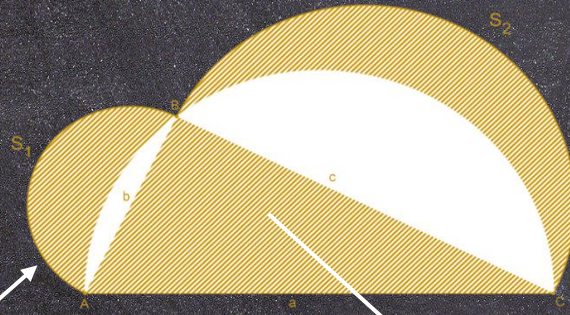
Considere um quadrado com lado 4 cm. É possível dividir esse quadrado em retângulos? Como isso poderia ser feito? Esses retângulos têm juntos a mesma área do quadrado? Qual a área de cada um dos retângulos? É possível comparar as áreas do retângulo e do quadrado? Cada retângulo equivale a que porção da área do quadrado? Esse quadrado poderia ser subdividido de outra forma? Que outras figuras geométricas planas poderiam surgir da subdivisão do quadrado? As novas figuras obtidas têm área proporcional a área do quadrado ou equivalente à área do quadrado?

Esse grupo de questões (que são exemplos) é um meio que os professores têm de relacionar o quadrado da proporcionalidade ou qualquer outro objeto da geometria refletida no Códice Atlântico aos objetos da geometria escolar. Essas questões são problematizações as quais nos referimos no início deste trabalho. As

problematizações fazem parte de nossas preocupações com o ensino que nos levaram a gerar encaminhamentos pedagógicos no final do nosso trabalho, pois nossa intenção é sugerir como o professor pode mobilizar os objetos da geometria refletida no Códice Atlântico em sua atividade docente e sugerir orientações pedagógicas para as aulas de matemática da Educação Básica.

A análise que fizemos nesta parte do texto foi resultado do nosso olhar semiótico para a geometria refletida no Códice Atlântico. Entretanto, questionamos: como o professor poderá mobilizar os elementos dessa análise, e de outras que ele mesmo poderá fazer, na elaboração de atividades de ensino? Esse é o aspecto sobre o qual trataremos na Parte III a seguir.

Leonardo vai à escola: Lúnulas equivalentes ao triângulo retângulo



a) Você acha possível associar a área das lúnulas à área do triângulo obtido?

b) Trata-se de que tipo de triângulo?

c) Que famoso teorema é associado a esse triângulo?

Observe que: $S = S_{AB} + S_{BC} + T$, ou seja, $S = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{bc}{2}$. Perceba que se da área S você retirar S_{AC} , restará, somente, a área das duas lúnulas, ou seja:

$$S - S_{AC} = S_1 + S_2. \text{ Assim:}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{bc}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Atinamos que pelo teorema de Pitágoras

$$b^2 + c^2 = a^2$$

PARTE III - DOS ENCAMINHAMENTOS

PEDAGÓGICOS

Trata-se da geometria escolar refletida no Códice Atlântico e seus encaminhamentos para um fazer pedagógico na escola. Nesta parte, apresentamos e discutimos sugestões de atividades de problematização e de projeto de investigação histórica no Códice Atlântico.

O trabalho que realizamos, principalmente a empiria da parte II, aponta para o fato de que o Códice Atlântico de Leonardo da Vinci contém desenhos e anotações com uma rica gama de significação, organizada em camadas que se vinculam ao contexto sociocultural, ao histórico, da Arte, ao científico e ao contexto matemático da época, que, na obra de Leonardo da Vinci, está presente de forma marcante, principalmente no que se refere à geometria da Antiguidade grega.

Para além disso, a análise semiótica que fizemos revela uma geometria, advinda das experimentações que Da Vinci fez em sua atividade artística e científica. Essas investigações, especialmente as geométricas, mobilizaram utensílios de geometria que se relacionam, e, em alguns casos, são os mesmos da geometria escolar da Educação Básica. Os desenhos de Leonardo da Vinci são signos que se assemelham, indicam e representam peças da geometria escolar. O estabelecimento das relações mencionadas se materializou, neste trabalho, pela vinculação dos instrumentos da geometria contidos nas folhas do Códice Atlântico aos objetos de ensino contidos nos livros didáticos de matemática e nos documentos curriculares oficiais que orientam o ensino de matemática no Brasil.

O resultado da análise mencionada já contém elementos que sustentam as relações pretendidas, porém, julgamos necessário apontar de forma didática e clara, no sentido de direcionar a possibilidades de efetivação das relações no ensino de geometria e na formação de docentes de matemática; até porque, como explicitamos na introdução, este estudo foi desenvolvido no âmbito de um Instituto e de um Programa de Pós-graduação, que têm como um de seus focos a produção de conhecimento, por meio de pesquisas, que contribua com a formação de professores de matemática e com o ensino nessa área.

Talvez a formação de docentes não tenha sido o objetivo primeiro deste trabalho. Porém, entendemos que, ao apontar, de forma direta, como a geometria refletida nas folhas do Códice Atlântico se associa aos objetos de aprendizagem em Geometria e propor um ensino por meio de investigação e problematização temática (MENDES, 2009a, 2009b, 2015) dessas relações, estamos contribuindo com a formação do professor que trabalha com a matemática na Educação Básica e com a instrução daquele que ainda está em formação inicial e precisa se apropriar de múltiplos encaminhamentos pedagógicos e, assim, lançar mão do qual for mais coerente à sua realidade escolar, quando estiver no exercício da sua função docente.

Diante disso, como mobilizar a geometria refletida nas folhas do Códice Atlântico, de Leonardo da Vinci, para o ensino de geometria na Educação Básica? Organizamos as contribuições desta pesquisa para a formação de professores e para o ensino de geometria de duas formas: pela elaboração de atividades de ensino no formato de UBP e pela indicação da possibilidade da realização de projetos de investigação histórica no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci. Iniciemos pelas UBP's.

Unidade Básica de Problematização (UBP)

O professor que leciona matemática na Educação Básica tem algumas atribuições relativas ao ato de ensinar tal disciplina, como: o estudo do conteúdo matemático das aulas, o estudo de metodologias de ensino, o planejamento das aulas, a elaboração de instrumentos avaliativos, a ministração de aulas e a elaboração de atividades de ensino. Todas essas e outras incumbências são importantes e podem implicar a aquisição de conhecimentos dos estudantes. Nosso destaque é para as atividades de ensino, ou seja, aquelas que são propostas para os educandos, pois elas podem interferir positivamente ou não no aprendizado do conteúdo de matemática trabalhado.

Dada sua importância, é preciso que sejam pensadas, planejadas e executadas com dedicação, e foco nos objetivos de aprendizagem para o estudante. Para isso, pode ser tomado como princípio epistemológico central a participação ativa do aluno no processo de aprender por meio de seu próprio investimento cognitivo e ativo, ou seja, aprender a aprender, conforme os ideários já lançados e estabelecidos por teóricos como John Dewey, Célestin Freinet, Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrosio, cada um a partir de suas áreas de pertencimento.

O princípio epistemológico referenciado pode ser materializado em sala de aula, mediante a elaboração e implementação de atividades de ensino, pautadas na investigação e na problematização do conhecimento matemático. Nesse sentido, ponderamos que a averiguação deve ser tomada como uma concepção educativa a ser estabelecida em todos os anos da Educação Básica³⁴, pois fomenta o desenvolvimento do espírito inquiridor e pesquisador do estudante, imputando-lhe habilidades como aprender a buscar o conhecimento com dedicação e autonomia, tal

³⁴ Também na Educação Superior, segundo Mendes (2009a, 2015).

como assevera Mendes (2009a, 2015). A problematização, por sua vez, confere ao saber matemático o caráter intrigante, desafiador, tão valorizado por estudantes, de forma especial pelos mais jovens, além de possibilitar a definição de múltiplas conexões entre a matemática e outros temas, como as interseções entre geometria, história e arte, discutidas neste trabalho (MIGUEL; MENDES, 2010).

Isto posto, apresentamos, nesta parte do estudo, o que concebemos por problematização, sua unidade básica e seus usos no ensino de geometria, para, então, descrever, a nosso modo, algumas atividades no formato de Unidades Básicas de Problematização (UBP's), que têm como finalidade oferecer aos professores que ensinam matemática, assim como outras disciplinas (já que as problematizações propostas ultrapassam as fronteiras da geometria e da matemática e transversalizam campos de conhecimento como História, Cultura e Arte, por exemplo), encaminhamentos pedagógicos que poderão complementar os meios já utilizados pelo educador, tal como o livro didático e outros materiais de ensino, e que proporcionarão, também, redimensionar sua prática docente e elevar o nível de aprendizado dos estudantes da Educação Básica.

Além disso, argumentaremos favoravelmente às UBP's, como possibilidade pedagógica de ensino, e apresentaremos pistas e orientações para auxiliar o trabalho com essa abordagem de ensino. Todavia, faz-se necessário, inicialmente, esclarecer questionamentos que norteiam esta parte da investigação. O que é uma UBP? Do que trata o assunto? Que tipos de práticas de ensino o professor pode elaborar para que a conexão entre os desenhos de Leonardo da Vinci e a geometria da Educação Básica sejam feitas pelos alunos? Quais atividades poderão desenvolver nos alunos as habilidades de pesquisar, discutir e propor, dentro da sala de aula de matemática?

Nossa intenção é que essas tarefas tenham como princípio a problematização da geometria em sala de aula (e para além dela), envolvendo a geometria mobilizada por Da Vinci, em seus desenhos e anotações, conectadas aos objetos de aprendizagem em geometria, presentes nas práticas escolares da Educação Básica. Deverão ter como objetivo mais amplo o ensino de geometria (bem como de seus objetos específicos), e como base metodológica as “Unidades Básicas de Problematização”, UBP's, propostas por Miguel e Mendes (2010, p. 386), os quais proferem que:

Uma UBP nada mais é do que um *flash discursivo memorialístico* que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de

atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade (ou desejo) que teria se manifestado a um ou mais integrantes de uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história (tradução livre).

A UBP, como os autores a caracterizam, é uma unidade que serve de base para a problematização elaborada a partir da definição de uma *prática sociocultural* (FARIAS; MENDES, 2014), da análise de seus aspectos internos e externos e identificação dos temas ou objetos de aprendizagem que se deseja estudar/ensinar. De posse dessa contextualização inicial é que se problematiza, ou seja, que se elaboram múltiplas questões (perguntas) com a intenção de levar o estudante a praticar uma ação em direção do que se quer que ele aprenda. Essa intervenção poderá gerar novas dúvidas, que poderão ser discutidas com os demais participantes da atividade, e constituir novas atuações investigativas em torno do objeto em estudo. Todo esse processo é o que conduz o discente a ter contato com o objeto matemático em análise e a apreender os conceitos a ele relacionados (MIGUEL; MENDES, 2010).

De forma resumida, a UBP, proposta por Miguel e Mendes (2010), é uma atividade materializada por um texto que descreve claramente uma prática sociocultural, preservando seus aspectos históricos e técnicos, além de aclarar a autoria do desempenho e das técnicas nela mobilizados. Essa prática histórica é recriada por esse relato (pois um relato sobre a prática não é a prática em ato) e conectada, por intermédio de uma série de questionamentos propostos pelo professor, a práticas de ensino e aprendizagem presentes no contexto escolar (MARTINS, 2017).

Esses questionamentos são apresentados pelo professor aos estudantes, de forma a instigá-los a investigar e buscar soluções criativas às situações propostas. As matemáticas utilizadas para tais resultados devem preservar as características daquelas mobilizadas nas práticas originais, ou seja, um dos aspectos fundamentais de uma UBP é resolver uma dificuldade da atualidade, utilizando-se das matemáticas que foram empregadas na solução de problemas do passado, representados, neste trabalho, pelos enfrentados por Da Vinci, ligados à sua atividade artística, para os quais buscou soluções na geometria antiga (MIGUEL; MENDES, 2010).

Nesta pesquisa, como já foi amplamente discutido na parte II, há uma geometria refletida ou contida nos desenhos e anotações (linguagem geométrica singular) de Da Vinci, produzidos nos séculos XV e XVI, a qual se originou durante a realização de uma prática ou de práticas socioculturais que se relacionam, principalmente, aos estudos, investigações e experimentações de Da Vinci com

geometria, objetivando mobilizar alguns elementos dessas análises para a sua produção artística.

Usamos o termo *linguagem geométrica singular*, por inferir que Leonardo da Vinci criou uma geometria nova, a partir da qual estudou, e a conectou à sua atividade artística quando estabeleceu analogias, como aquelas entre as transformações volumétricas e as transformações no plano, à representação do movimento em suas pinturas, tema já discutido neste trabalho. Para ficar mais claro o que queremos comunicar, mediante o estudo que fizemos, pudemos perceber que Da Vinci tomou como base a geometria contida nos clássicos gregos, principalmente em *Os elementos*, de Euclides, e inovou em suas experimentações, sobretudo no que se refere aos modos de demonstrações nos quais materializou verdadeiras equações, cujas incógnitas são desenhos.

Mas essa não é a tese que defendemos, e sim um aspecto da geometria contida no Códice Atlântico, referente ao caráter criativo e inovador de Leonardo da Vinci, atributo que pode ser investigado e problematizado no ensino de geometria na Educação Básica, considerando que alguns objetos mobilizados por Da Vinci, no seu processo de experimentação prática com geometria, se relacionam aos instrumentos de aprendizagem da geometria abordada na Educação Básica.

Miguel e Mendes (2010) salientam que as UBP's não devem ser concebidas ou tratadas como uma lista de exercícios convencionais para que os estudantes resolvam uma questão de cada vez, mas, na sua totalidade, como um momento de discussão, troca de ideias, interação e formulação de hipóteses. Devem ser compreendidas como um convite a uma aula na qual todos têm a oportunidade de se expressar, propor soluções, inferir a partir destas e lançar novas questões que não foram vistas pelos professores. As UBP's podem propiciar um ambiente onde as pessoas são colocadas em movimento, em busca de respostas para os problemas propostos e gerados por meio das discussões surgidas na realização das atividades.

Performances de ensino no formato de UBP são necessárias no espaço escolar, por ser necessário um ensino de matemática que coloque professores e alunos em movimento, que os mobilize no sentido de provocar neles um desequilíbrio, tirando-os de sua zona de conforto e levando-os para o confronto de ideias, para um ambiente onde pessoas com diferentes maneiras de pensar e agir se juntam numa discussão plural, cujo elemento unificador é o objetivo comum de se apropriar do conhecimento matemático e geométrico de forma específica. Portanto, a diversidade

e a riqueza de conceitos e opiniões que compõem a sala de aula poderão ser exploradas, atribuindo mais eficácia ao ensino, que poderá culminar em um aprendizado efetivo e com significado pelos estudantes (MENDES, 2009a, 2015).

Nossa experiência como professores na Educação Básica³⁵ nos permite fazer algumas inferências sobre o ensino e os seus efeitos nos estudantes, pois, mesmo o aprendizado sendo algo que não podemos palpar e nem ver com clareza suficiente para fazer afirmações, é possível identificar comportamentos e reações dos alunos diante das atividades que lhes são propostas. Aquelas no formato de listas de exercícios para serem feitos individualmente, na sala de aula ou em casa (que têm importância na fixação de objetos matemáticos) pouco favorecem uma prática problematizadora e investigativa pelos estudantes, porque, geralmente, esses exercícios são resolvidos mediante uma consulta ao caderno e ao livro didático. Desse modo, eles pouco questionam e acabam por aceitar, de forma passiva, os assuntos que lhes são apresentados pelo professor de matemática, ou seja, não têm participação ativa no seu processo de aprendizagem.

Por outro lado, identificamos que quando os estudantes têm oportunidades de expressar suas opiniões, discutir, propor e mostrar sua capacidade de problematizar, refletir e criar, o fazem muito bem. Isso acontece, principalmente, em atividades desenvolvidas de forma colaborativa por equipes, que apresentem problemas a serem resolvidos pelo grupo, como os que são propostos em feiras de ciências e matemáticas, por exemplo. O que geralmente acontece nesses momentos? Cada turma, em torno de 40 (quarenta) alunos, recebe um tema que é subdividido e distribuído em equipes; os educandos pesquisam, estudam sobre os temas, tiram dúvidas com o professor, discutem entre si, fazem propostas e criam diferentes maneiras para apresentar os resultados, como: maquetes, cartazes, apresentações e simulações em computador, paródias, peças de teatro etc. Além disso, mobilizam a comunidade em volta da escola, e, no dia marcado, explicam tal assunto para o público interno e externo à escola. Eles conseguem aprender, compreender, criar e explicar de tal forma que as pessoas absorvem a mensagem transmitida por eles e os parabenizam pelo trabalho feito.

Os discentes dedicam horas, dias, semanas para esses trabalhos e o fazem depreendendo uma enorme quantidade de energia. Realizam tudo o que nem sempre

³⁵ Sou professor de Matemática da Educação Básica desde maio de 2004. Portanto, no período da escrita deste texto, eu já estava com 16 anos na docência.

conseguem realizar em nossas aulas expositivas, e esse comportamento gera reflexões nos professores, visto que estudantes considerados com baixo rendimento nas aulas conseguem ter um desempenho à mesma altura dos demais alunos. Então, se eles são capazes de praticar ações criativas e eficazes acerca de um determinado tema, em uma atividade episódica na escola, porque não os levar a ter essa mesma postura na sala de aula de matemática, em todo o cotidiano escolar, ao longo do período letivo? Quais atitudes o docente deve tomar para que isso aconteça de fato?

Precisamos, como professores, intervir nessa realidade e contribuir para que haja mudanças, em prol de um ensino de matemática que explore com mais eficiência a problematização e investigação como possibilidades pedagógicas. À vista disso, é que sugerimos atividades no formato de UBP's, que poderão possibilitar outras maneiras de aprender e ensinar, pois abrem espaço para o diálogo franco entre professor e estudante na discussão de temas da geometria escolar. São ações que irão propiciar ao estudante a exploração de sua capacidade investigativa, e, além disso, aprenderão a aprender, habilidades necessárias à aquisição de conhecimentos em matemática e em qualquer disciplina escolar.

Esse tipo de atividade é possível se o profissional de educação que ministra matemática na Educação Básica aderir a uma filosofia de ensino pautada no olhar *globalizante e transdisciplinar* sobre o conhecimento matemático em oposição à sua apresentação de modo *fragmentado e/ou filtrado* aos estudantes (D'AMBROSIO, 2016), e que pode ser materializado pelo professor em sua performance docente, à medida em que ele implementar atividades de ensino que oportunize ao aluno vivenciar uma prática educativa instigante, contextualizada de maneira sociocultural e reflexiva, cuja motivação para o ensino coloque a matemática escolar em relação com outras matemáticas e outros conhecimentos, a exemplo das práticas artísticas de Da Vinci e sua mobilização para o ensino sugerida neste trabalho.

Assim, é preciso que se pratique um ensino de matemática que viabilize ao estudante desenvolver habilidades para enfrentar, com possibilidade de sucesso, os problemas reais com os quais possa se deparar no campo educacional, intelectual e profissional, futuramente. Defendemos que essas aptidões podem ser otimizadas em atividades, como as UBP's, propostas por Miguel e Mendes (2010), que se utilizam de uma matemática histórica e sociocultural, fruto da ação humana sobre o meio, conectando-a à matemática escolar, no intuito de propiciar aos alunos a problematização e investigação dos objetos dessa matemática.

Nessa perspectiva, propomos 9 (nove) UBP's, a partir de folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e da análise que fizemos para identificar os objetos de geometria, mobilizados por ele em seus estudos. As problematizações aqui descritas não são um conjunto de atividades que devem ser seguidas à risca pelo docente que optar por essa metodologia, mas, sim, encaminhamentos pedagógicos que visam equipar o professor com ideias, pensamentos e reflexões sobre uma nova ferramenta metodológica/pedagógica a ser usada por ele, de maneira a atingir seus objetivos de ensino no seu contexto escolar específico.

Para auxiliar o trabalho docente do professor que priorizar a utilização de problematizações e a implementação de atividades no formato de UBP na sala de aula, sugerimos algumas orientações metodológicas organizadas em 7 (sete) etapas. Essa organização tem como fundamento as ideias de Mendes (2009a, 2009b, 2015) sobre a sistematização e implementação de práticas de investigação e históricas no ensino de matemática.

1) Apresentar a atividade aos estudantes

Far-se-á uma apresentação breve que deixará claro no que consiste a atividade, bem como a sua composição, os passos ou momentos desta. Ou seja: estudo em grupo (dentro e fora da escola); orientações do professor a cada grupo e redefinição de objetivos e ações; organização das informações obtidas no estudo; apresentação dos resultados por cada equipe à sua turma; debate sobre as apresentações em sala de aula; avaliação da atividade em grupo e individual. As etapas, assim como a sua ordem, podem ser adaptadas pelo docente de forma que sejam obtidos os melhores resultados de aprendizagem possíveis.

É necessário que fique evidente para os estudantes seu papel na feitura da atividade, isto é, o que eles precisarão fazer para cumprir as etapas da tarefa. Para isso, far-se-á sua exposição e solicitar-se-á aos alunos que tirem suas dúvidas. O espaço ficará aberto para que eles se sintam à vontade em questionar e sugerir; tudo será conduzido de modo que eles atinjam os objetivos de aprendizagem propostos pelo docente. O que queremos dizer é que o professor deve ter clareza do que quer que seus alunos aprendam com a realização da prática. E estes, por sua vez, devem ter clareza do que devem fazer, parte das atribuições do professor. Diante disso, este irá escutá-los e conduzi-los para tal propósito.

2) Formação de grupos

A formação de equipes é necessária para as atividades de problematização, visto que a ideia é gerar discussão, logo a composição de grupos beneficia esse desempenho. Sugerimos que podem conter entre cinco e seis alunos, já que nossa experiência em sala de aula nos permite afirmar que um número maior de componentes poderá desfavorecer a participação efetiva de todos os integrantes do grupo. O professor escolhe o critério que julgar melhor para a constituição dos grupos. Contudo, deve-se pensar antecipadamente em como fazer e considerar fatores, como: quantidade de alunos na turma, as relações de amizade entre eles, o desempenho deles nas aulas, o comportamento de cada um etc., pois é preciso ter cuidado para que ninguém fique ou se sinta excluído de alguma forma.

Como as atividades que propusemos aqui têm como base os desenhos, os estudantes precisarão receber material impresso, que contenha as folhas do código estudadas, para que eles possam fazer os seus experimentos, isto é: riscar as figuras, recortar, fazer colagem com as partes, buscar outras imagens e desenhos que tenham relação com a prática, criar figuras originais que possuam as propriedades das estudadas etc. O professor deve deixar claro que eles têm uma variedade de métodos a seguir, no intuito de apresentar sua tarefa da forma mais clara possível, no propósito de que seus colegas consigam compreender o que foi feito.

A realização da atividade de problematização pode ser organizada em momentos presenciais e a distância, uma vez que parte do trabalho em equipe, principalmente as investigações, pode ser feita sem a presença do professor, com a intenção de que os alunos ganhem autonomia e comecem a ter iniciativa para buscar o conhecimento, ou seja, aprender a aprender, que, aliás, é um dos pontos fortes das UBP's. Porém, essas ações devem ser muito bem orientadas pelo docente, para que os alunos compreendam o que fazer. As pesquisas podem ser feitas em bibliotecas virtuais, em sites da internet, e em bibliotecas físicas, sempre orientadas pelo professor, de modo que os estudantes tenham acesso a fontes de informações confiáveis.

Para que o trabalho não seja repetitivo, e ponderando que se tem um currículo a cumprir, cada grupo formado poderá se ocupar com uma UBP diferente, assim, se forem constituídos cinco grupos, serão resolvidas cinco atividades com diferentes objetivos de aprendizagem. Como haverá a apresentação e a discussão sobre todas elas, todos os estudantes terão acesso aos temas de cada UBP. Nesse momento, o

professor irá complementar (quando necessário) as explicações das equipes para que os alunos compreendam a mensagem a ser repassada.

3) Distribuição e feitura da atividade

Vamos considerar uma turma com 30 (trinta) estudantes, da qual seriam formados 5 (cinco) ou 6 (seis) grupos, em que cada um teria uma UBP para trabalhar, o que totalizaria, respectivamente, 5 (cinco) ou 6 (seis) UBP's diferentes. O professor poderá organizar a tarefa desse bloco de atividades em duas ou até três semanas. Uma turma do Ensino Médio, por exemplo, tem quatro aulas de matemática por semana (cada uma com 45 minutos), então, se o docente prever a realização das atividades em duas semanas, ele poderá organizar as oito aulas presenciais da seguinte maneira: quatro aulas para que o professor apresente e oriente as atividades, duas para a demonstração dos resultados e discussão, e duas para a avaliação. Isso sem incluir a pesquisa e o trabalho em equipe, feito pelos estudantes fora da escola.

Como as atividades que sugestionamos foram feitas a partir de desenhos de Leonardo da Vinci, será necessário que as equipes tenham ferramentas, como: lápis, borracha, caneta, lápis de cor e material de desenho, principalmente régua e compasso. Uma vez que já temos um pouco de experiência com os desenhos geométricos de Leonardo da Vinci, sugerimos que as equipes tenham um cuidado especial com o tipo de compasso a ser adquirido, porque alguns não têm firmeza suficiente para traçar círculos ou são pequenos demais para o tamanho dos desenhos que se quer fazer.

4) Apresentação e discussão dos resultados

Esse é um momento muito rico e deve ser planejado e executado de forma a dar espaço para que todos se manifestem. Cada grupo apresenta seus resultados e, depois, é permitido um tempo para que os colegas comentem o efeito das apresentações das outras equipes e façam perguntas. A troca de experiências deve ser o principal objetivo dessa etapa, pois com ela os estudantes poderão aprender a respeitar outras opiniões e não considerar que somente as suas são as corretas.

É importante que o “certo e errado, ou melhor e pior” não sejam o aspecto principal, uma vez que o mais importante são os resultados obtidos nas experiências que os estudantes tiveram ao fazer as atividades. Todas as soluções adquiridas devem ser igualmente válidas, e isso tem que ser óbvio nas orientações iniciais.

Reafirmamos que cabe ao professor conduzir os acontecimentos relativos à atividade, de modo que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados.

5) Avaliação pelos estudantes

Os estudantes precisam avaliar a atividade que desenvolveram, o que poderá ocorrer em dois momentos, um individual e outro coletivo. Para a avaliação individual, o professor pode pedir que eles registrem em um papel suas impressões a respeito da prática (isso pode ser feito em casa): o que eles gostaram ou não, quais as dificuldades que tiveram, o que acharam do trabalho em grupo, quais os aprendizados que adquiriram etc. A outra parte da avaliação deve ser em grupo e pode acontecer na mesma aula, após o final da apresentação e discussão das tarefas.

6) Avaliação (dos estudantes) pelo professor

A realização do trabalho em grupo exige que o professor esteja atento às ações dos estudantes e verifique como está sendo a participação e a dedicação de cada um na realização da atividade como um todo. Além disso, ele irá avaliar as apresentações, as perguntas feitas, as sugestões e respostas dos grupos. Se ele quiser, poderá executar um instrumento avaliativo com questionamentos sobre o conteúdo de matemática, relacionando com os desenhos de Leonardo da Vinci.

7) Apresentação do conteúdo de matemática

Se o professor achar necessário que o conteúdo de matemática, aqui, especificamente, o de geometria, seja relacionado às atividades de problematização, deve apresentar aos estudantes. Ideal é que isso vá acontecendo durante a prática, porque ao se envolver com as problematizações, o aluno será conduzido ao assunto de geometria. É a oportunidade para que o educador intervenha, no sentido de esclarecer dúvidas e ajudar o discente a relacionar os temas da atividade com os objetos da geometria escolar. Se for necessário, depois de encerrada a tarefa pelos estudantes, o docente poderá ministrar aulas sobre os conteúdos de geometria, mas conectando-os sempre às atividades de UBP, realizadas pelos alunos.

Além das orientações feitas até aqui, outras específicas, para algumas UBP's que elaboramos, serão inseridas quando necessário. Então, finalmente, vamos às atividades.

UBP 1: Leonardo da Vinci, seu tempo, sua obra e a matemática por ele estudada.

Objetivos: Conhecer Da Vinci e sua obra; relacionar a geometria refletida no Códice Atlântico aos objetos de aprendizagem em Geometria da Educação Básica.

Leonardo da Vinci, famoso pintor renascentista, nasceu em 15 de abril de 1452, na cidade de Vinci, na região da Toscana, na Itália. Filho ilegítimo do sr. Piero da Vinci (tabelião em Florença), com uma camponesa chamada Caterina; foi criado pelos avós no lugar onde nasceu. Após sua morte, em 23 de abril de 1519, em Amboise, na França, seu amigo Francesco Melzi herdou seus estudos e anotações materializados em uma coleção com cerca de 13.000 (treze mil) páginas, das quais, atualmente, conhece-se o paradeiro de mais ou menos 7.000 (sete mil), boa parte delas, reunidas em Códices, em bibliotecas da Itália e de outros países (ISAACSON, 2017; WHITE, 2002).

Dentre essas coleções, está o Códice Atlântico³⁶, que reúne estudos e desenhos de diferentes áreas de conhecimento, pelas quais Da Vinci transitava com excelência. O referido Códice é formado por 1.119 (mil, cento e dezenove) folhas, agregadas em um único volume, por Pompeo Leoni, no final do século XVI, em Milão, e reúne uma coleção de documentos que abarca praticamente toda a vida artística e científica de Da Vinci, produzidos por ele no período de 1478 a 1519, 41 (quarenta e um) anos, aproximadamente. Contém estudos e apontamentos práticos e teóricos sobre temas como: arquitetura, arte da guerra, mecânica, astronomia, hidráulica, óptica, anatomia, botânica, zoologia, estudos sobre o voo, estudos sobre a água, textos literários, anotações autobiográficas, perspectiva, aritmética e geometria (ISAACSON, 2017; NAVONI, 2012).

a) Você sabe ou já ouviu falar sobre o período do Renascimento? Por que esse período tem esse nome? Pesquise e descreva, sinteticamente, algumas características desse período histórico.

b) Você já havia escutado falar em Leonardo da Vinci? Pesquise e fale um pouco sobre ele.

c) O texto menciona que Leonardo da Vinci foi um famoso pintor renascentista. Você conhece alguma pintura de Leonardo da Vinci? Quais? Caso não conheça, pesquise e cite algumas.

³⁶ O Códice Atlântico é a maior coleção de desenhos e anotações de Leonardo da Vinci.

d) Além de ter sido pintor, Leonardo da Vinci fez estudos sobre alguns temas científicos que estão relacionados neste texto? Qual, dentre os temas mencionados, lhe chama mais atenção? Escolha um deles e pesquise a respeito.

e) Você sabe algo sobre o Códice Atlântico? Já havia ouvido falar nesse manuscrito? O texto relata que se trata de um documento com 1.119 (mil, cento e dezenove) folhas, nas quais Da Vinci registrou parte de seus estudos. Vamos conhecer melhor esse material?

f) Faça uma busca na internet com o tema “Códice Atlântico” e registre as informações que você encontrar.

g) Repita a busca com a palavra “Códice Atlântico” e selecione “imagens”. Quais você encontrou? Elas tratam de quê? Quais lhe chamam mais atenção e por quê? Será que essas imagens são realmente de folhas do Códice Atlântico? Como ter certeza de que as folhas são do Códice Atlântico?

h) Para sanar as dúvidas da questão anterior, faça uma visita ao portal <http://www.codex-atlanticus.it/#/> . Nele estão todas as 1.119 (mil, cento e dezenove) folhas do Códice Atlântico. Traduza a página para o português e clique na opção *explore o códice*. Você terá acesso a todas as folhas. Agora, você poderá comparar as quais você encontrou com as do Códice para verificar quais são realmente dele.

i) Dentre as folhas que você encontrou nas buscas anteriores, há alguma que lhe lembra algo que você estudou na escola? E nas aulas de matemática? Caso não tenha encontrado, faça uma nova visita ao portal do Códice Atlântico e busque por folhas que têm associação com os conteúdos de Matemática. Quais dessas folhas selecionadas por você tem relação com a geometria que você conhece? Que elementos ou assuntos de Geometria você consegue identificar nas imagens das folhas?

j) Para melhorar sua pesquisa, pegue um livro didático de matemática e localize a parte que trata de geometria. Há algum conteúdo do livro que você relacionaria com folhas do Códice Atlântico? Qual?

k) Que aprendizados você obteve com essa atividade?

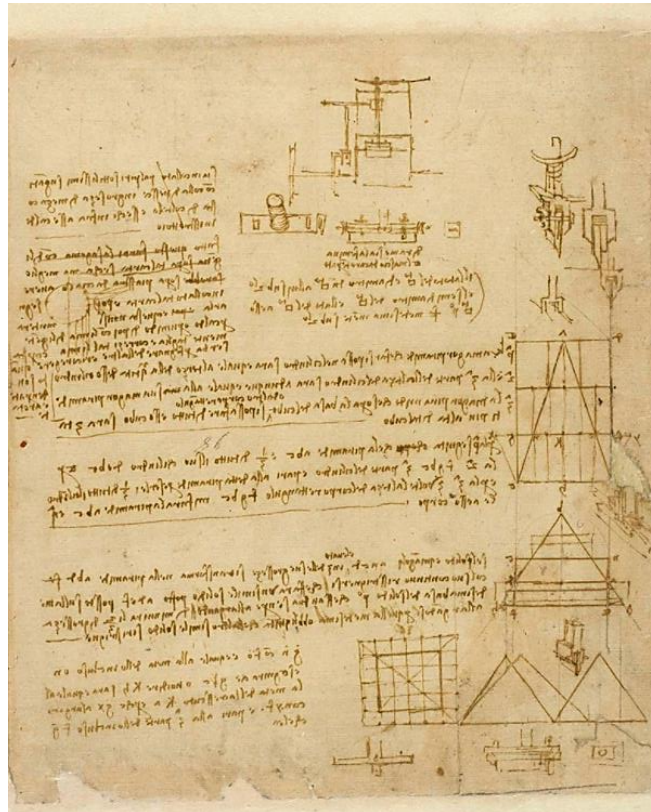
UBP 2: A geometria da folha 100r do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci

Objetivos: Investigar que geometria está refletida na folha 100r do Códice Atlântico; estabelecer relações entre essa geometria e aquela estudada na Educação Básica.

Leonardo da Vinci, além de pintar quadros famosos, fez estudos sobre temas como óptica, arquitetura, hidráulica e geometria. Isso tudo foi registrado por ele em milhares de folhas que contêm anotações e desenhos que, hoje, se encontram em coleções pelo mundo todo, em bibliotecas, museus e em propriedades particulares. Uma desses acervos é o Códice Atlântico, que reúne mais de mil dessas folhas com temas variados.

Na folha 100r (figura 80), uma das muitas que fazem parte do referido Códice, observamos, principalmente, a apresentação de dois temas: a construção de uma espécie de lâmina, como um formão, para corte ou entalhe de madeira, mármore e outros materiais, pensada por Da Vinci, possivelmente, para a utilização em atividades como a escultura, por exemplo; e, os traçados de desenhos que tratam da geometria. Há, também, algumas anotações feitas por Leonardo da Vinci, nas quais descreve sobre as imagens e outras coisas que não têm relação direta com as representações.

Figura 80: Folha 100 do Códice Atlântico



Fonte: Sánchez e Almarza (2008b, p. 71).

Em meio aos apontamentos de Leonardo da Vinci, há alguns que aludem à diagonal do quadrado e ao volume de sólidos geométricos. Sabemos que é difícil decodificar o que está escrito na folha, por isso, essa leitura já foi feita por um pesquisador italiano chamado Augusto Marinoni, que transcreveu as anotações de Leonardo da Vinci. A partir desse trabalho, fizemos uma tradução para que você tivesse acesso ao conteúdo da folha. Em um desses registros, Leonardo da Vinci se refere a uma relação entre quadrados, e nos outros ele escreve sobre pirâmides, cones, cilindros e prismas, para propor uma conexão entre esses sólidos geométricos. Os trechos estão traduzidos a seguir e estão escritos ao lado do primeiro desenho geométrico da folha, que é aquele que tem um triângulo inscrito em um retângulo, dividido em linhas horizontais e verticais.

Caro professor, esta UBP contém três blocos de questões: o primeiro versa sobre aspectos mais gerais; o segundo trata a respeito da geometria plana; e, o terceiro discorre quanto à geometria espacial. Todas as 1.119 (mil, cento e dezenove) folhas do Códice Atlântico estão digitalizadas no endereço <http://www.codex-atlanticus.it/#/Overview>. Os estudantes poderão consultar, porém precisarão de orientação, por isso, faça a consulta antecipadamente e se aproprie do funcionamento da página para, assim, orientá-los.

Bloco de questões 1: Aspectos gerais e geométricos

a) Observe a folha 100r! Quais as suas primeiras impressões sobre ela? Quais lembranças você tem ao visualizá-la?

b) Você consegue entender o que Da Vinci fez na folha? Os desenhos são compreensíveis?

c) Destaque um desenho que lhe chamou mais a atenção e por que isso aconteceu.

d) Quais dos desenhos da folha lhe lembram aqueles das aulas de geometria? Que geometria você reconhece neles?

e) Considere os seguintes elementos de geometria: ponto, reta, ângulo, segmento de reta, horizontal, vertical, diagonal, triângulo, triângulo retângulo, triângulo equilátero, triângulo isósceles, retângulo, quadrado, círculo, circunferência, esfera, cilindro, cone, prisma e pirâmide. Agora, observe a folha e faça marcações e anotações nela e em outro papel, e diga: quais desses elementos de geometria você identifica na folha 100r?

f) Organize um texto sobre a matemática que você identificou na folha. Inicie pela identificação dos objetos de geometria sugeridos no item (anterior). Depois, elabore desenhos dessas gravuras e as identifique pelo nome. Agora, escreva sobre as quais você identificou e como as ilustrações da folha lhe ajudaram a lembrar desses objetos. Além disso, registre outros comentários sobre a folha e sobre a geometria que você identificou nela.

Bloco de questões 2: Geometria Plana

a) Há algum desenho na folha que lhe remete à medição de área de figuras geométricas planas? Que desenho é esse? Como a medição da área dessa figura pode ser feita, considerando o desenho de Leonardo da Vinci? E levando em

consideração a fórmula para medição de área, os resultados encontrados são os mesmos?

b) Você sabe o que é um quadrado? E um retângulo? Quais as propriedades e características de cada um? Qual a diferença entre eles? Como é possível identificar o valor da diagonal de um quadrado ou de um retângulo?

c) Dentre os desenhos de Da Vinci, há um que lembra mais um quadrado, qual é? Olhe para ele e o represente em seu caderno. Na parte inferior da folha em estudo, tem um quadrado desenhado por Da Vinci. Qual a área e a diagonal desse quadrado?

d) Em uma de suas anotações, Da Vinci escreve que o **lado** de um **quadrado** tem a mesma medida da **diagonal** de um **quadrado subduplo**, e a **metade da diagonal** do quadrado é o lado do quadrado a esse primeiro também subduplo. Perceba que foram destacadas algumas palavras no período anterior. Dentre elas, há alguma que você não conhece? Busque significados para essas palavras.

e) A anotação de Da Vinci, mencionada anteriormente, trata de uma associação entre quadrados. Como você descreveria essa relação?

f) O que seria um quadrado subduplo? E um quadrado duplo?

g) Essa anotação de Da Vinci se refere à área ou ao perímetro do quadrado? Ou a ambos? Faça seus comentários sobre essa situação.

h) Desenhe dois quadrados em seu caderno, e diga: o que significa, afinal, essa relação entre quadrados a qual Da Vinci se refere?

Bloco de questões 3: Geometria espacial

a) Você já estudou geometria espacial? Do que ela trata?

b) Pirâmide, prisma, cilindro e cone são sólidos geométricos. Você conhece essas formas geométricas? Faça desenhos, ou anotações, e diga o que cada uma delas representa para você.

c) Os sólidos geométricos têm características que os diferem das figuras geométricas planas, quais são elas?

d) Como é determinado o valor da medida do volume dos sólidos geométricos, mencionados no item b?

e) Quais as propriedades e características de cada uma dessas formas geométricas?

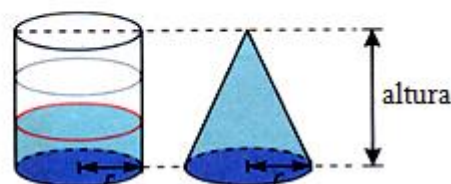
f) Dentre as anotações na folha 100r, Leonardo da Vinci faz três que se referem aos sólidos geométricos, a primeira é “o maior cone que pode ser feito no cilindro será

igual a um terço da quantidade do cilindro”. Analise essa afirmação. Ela pode ser comprovada geometricamente? Estude a geometria do cilindro e do cone e diga: como essa relação pode ser feita?

g) A figura 81³⁷ retrata um recipiente de forma cilíndrica que possui três marcações que o dividem em três partes de mesmo volume, cada uma com um terço do volume do cilindro inicial. Essas partes são cilindros que têm altura igual a um terço da altura do cilindro inicial. Esse



Figura 81: Cone e cilindro



recipiente recebe um volume de líquido até atingir a altura da primeira faixa, ou seja, até encher o cilindro B³⁸. Observe a figura e diga: qual a relação entre ela e as anotações de Leonardo da Vinci dos itens *n* e *p*?

h) A segunda anotação de Leonardo da Vinci é “E a terça parte da altura do cilindro será, portanto, igual a seu maior cone”. Essa afirmação tem relação com a primeira? Qual? Explique como ela pode ser feita.

i) Na terceira anotação, Da Vinci escreve que “A pirâmide maior, sobre a base do cubo ou de outro corpo retangular, tem volume igual à terça parte desse corpo”. Ao registrar “corpo retangular”, Da Vinci se refere aos prismas. Analise essa afirmação de acordo com a geometria da pirâmide e do prisma, e diga: como ela pode ser demonstrada?

j) Considere a figura 82. Ela apresenta dois prismas retangulares e uma pirâmide de base retangular. Ao que essa figura lhe remete? Faça uma descrição da figura! Por que os prismas têm faixas horizontais? Essas faixas são

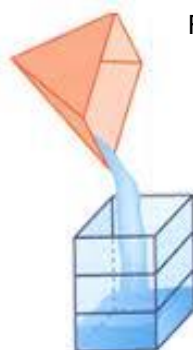
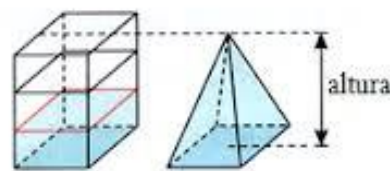


Figura 82: Prisma e pirâmide



³⁷ Fonte das figuras 81 e 82: <https://escolaeducacao.com.br/geometria-espacial>. Acesso em 25/03/2020.

³⁸ O cilindro B é a parte do cilindro maior que foi preenchida com água, ou seja, o cilindro B equivale a 1/3 do cilindro maior.

para ornamentar o prisma? Essa figura tem alguma relação com o apontamento de Leonardo da Vinci, no item *q*? Que associações podem ser estabelecidas?

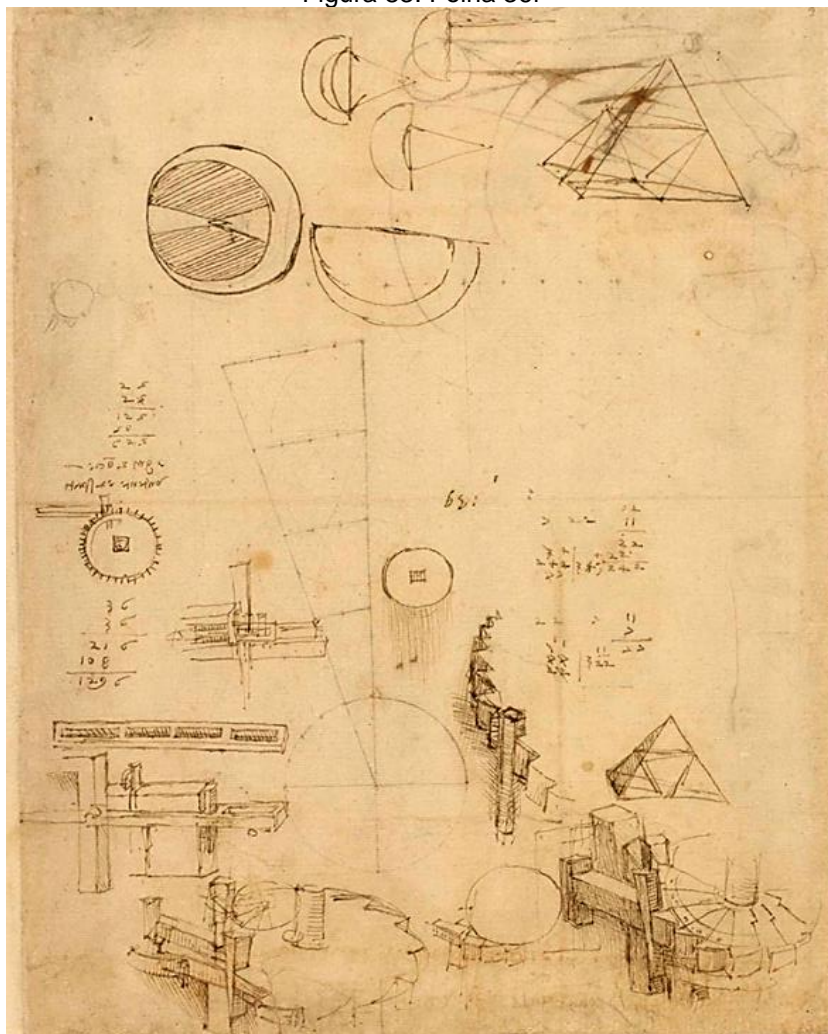
k) As anotações destacadas anteriormente foram feitas por Leonardo da Vinci, a partir de estudos feitos por ele em obras de matemática, como “Os elementos”, de Euclides. Você conhece essa obra? Do que ela trata? Tente verificar nela se os apontamentos de Leonardo da Vinci têm relação com o seu conteúdo.

UBP 3: O círculo e o triângulo isósceles em Leonardo da Vinci

Objetivo: Explorar elementos da circunferência e do triângulo isósceles.

A folha 36r (figura 83) contém um grupo de desenhos geométricos: duas pirâmides decompostas em outras pirâmides, círculos e lúnulas. Na metade inferior, um grupo de desenhos mecânicos, como rodas dentadas (engrenagens) entre os quais encontram-se algumas operações aritméticas com destaque para os cálculos do quadrado de 25 e de 36.

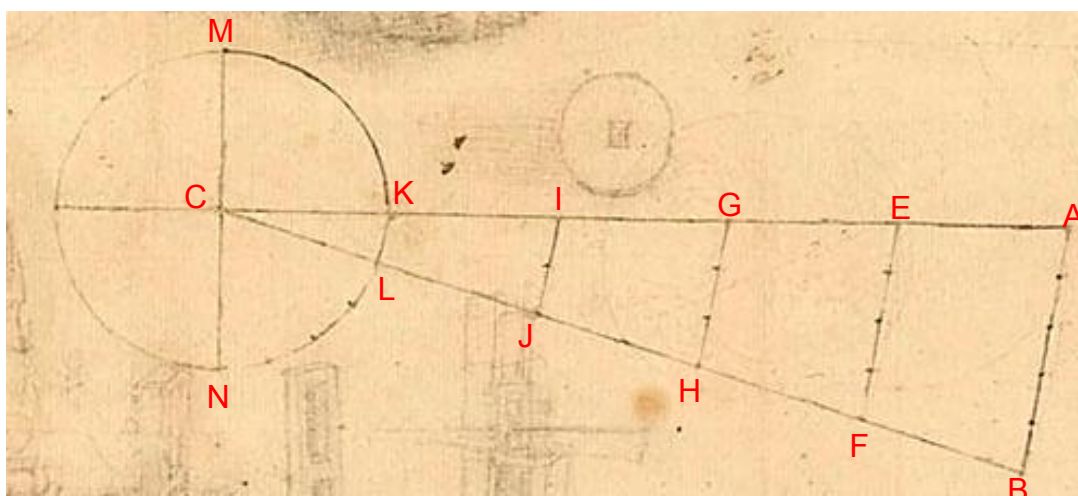
Figura 83: Folha 36r



Fonte: Sánchez e Almarza (2008a, p. 101).

Na metade inferior da folha, quase no centro, traçado com régua e compasso, um triângulo isósceles com um de seus vértices no centro de um círculo. Pelo desenho, é possível verificar que há uma relação entre o raio do círculo e os lados iguais do triângulo. Na figura 84, destacamos a imagem em estudo e inserimos algumas marcações (letras) para indicar pontos importantes desta (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Figura 84: Triângulo isósceles e círculo



Fonte: Adaptado de Sánchez e Almarza, (2008a, p. 102).

O desenho do detalhe é visto no reto e no verso da folha, mas só é mencionado na descrição do verso da folha 36 (trinta e seis). Trata-se de um triângulo isósceles (ABC), cujos lados congruentes (AC e BC) medem 5 (cinco) vezes a medida do raio da circunferência. Um de seus vértices (C) coincide com o centro da circunferência e o ângulo referente ao vértice C é de 18° , pois o arco KN, que mede 90° , possui marcações que o divide em cinco partes iguais.

As relações da geometria refletida na folha 36 (trinta e seis) com a geometria escolar podem ser estabelecidas por meio da investigação dos desenhos de Da Vinci, com foco nos temas da geometria escolar, que se incluem na geometria plana, que faz parte do currículo do Ensino Fundamental, mas que é mobilizada também no Ensino Médio, quando se estuda, por exemplo, os sólidos geométricos (MARTINS; MENDES, 2020).

Caro professor, ao elaborar as perguntas (problematizações), é preciso que se tenha como foco os temas de geometria escolar a serem mobilizados mediante os desenhos de Leonardo da Vinci. No caso dos contidos na figura 84, pode-se inferir

que o triângulo ABC remete aos tópicos: classificação dos triângulos quanto à medida dos lados (equilátero, isósceles ou escaleno), soma dos ângulos internos do triângulo, medição da área do triângulo e semelhança entre triângulos; o círculo, por sua vez, permite explorar: raio, diâmetro, centro, cordas, área, definição de círculo, área do círculo, setor circular, área do setor, área da coroa circular (BRASIL, 2017, 2007).

Além dos temas de geometria listados, é possível explorar, ainda, a relação entre o raio da circunferência e o lado do triângulo, o que pode ser objeto de estudo pelos alunos que tiverem contato com o desenho. Vejamos as problematizações que poderão levar ao estabelecimento das relações pretendidas.

a) Considere a circunferência contida no desenho de Leonardo da Vinci e os elementos que ela compreende. Como se chamam os segmentos MN e MC? Que relação é possível estabelecer entre as medidas desses segmentos? Que ponto representa o centro da circunferência?

b) Pondere que o segmento MC mede 2u.m. Mediante essa medida, pode-se calcular a medida de MN? Qual seria o procedimento para esse cálculo e qual a medida de MN? Tomando-se as medidas de MC e MN, calcule o comprimento da circunferência e a área do círculo em questão.

d) Perceba que no desenho de Leonardo da Vinci há um triângulo ABC. Além do triângulo ABC, é possível identificar outros triângulos no desenho? Quais? Eles são semelhantes? São congruentes? Justifique sua resposta.

e) Observe que no desenho de Leonardo da Vinci há alguns segmentos de reta. Segundo a descrição do desenho, o segmento AC é 5 (cinco) vezes o segmento CK. Partindo dessa afirmação e considerando todos os segmentos que dividem o segmento AC, que associações são possíveis estabelecer entre AC e os demais segmentos que o dividem?

UBP 4: Leonardo da Vinci: artista, cientista ou geômetra?

Objetivo: Conhecer Da Vinci, seus estudos e o Códice Atlântico.

Leonardo da Vinci recebe o sobrenome Vinci devido ao lugar onde nasceu, no ano de 1452, na cidade de Vinci, na região da Toscana, na Itália. Foi pintor, escultor, engenheiro arquiteto, mecânico, inventor, produtor e organizador de espetáculos e festas, principalmente na corte de Ludovico Sforza, que foi Duque de Milão. É considerado um dos maiores pintores de todos os tempos, uma vez que foi o autor de “a Mona Lisa” e “a Última Ceia”, dentre outras. Além de artista, foi estudioso e registrou

seus conhecimentos por meio de desenhos e anotações, que hoje estão organizados em coleções, como o Códice Atlântico (ISAACSON, 2017; WHITE, 2002).

Há algumas versões do Códice Atlântico publicadas, contudo os originais estão na Biblioteca Ambrosiana de Milão, na Itália. A qual utilizamos neste trabalho é uma versão publicada no Brasil em 10 (dez) volumes, com as primeiras 602 (seiscentas e duas) folhas do Códice, cada uma com a transcrição do texto de Leonardo da Vinci em italiano, e uma descrição de cada folha em língua portuguesa. Dentre as folhas do Códice, há aquelas que têm como tema a geometria, que ele estudava em busca de elementos que pudessem ser usados em suas atividades de pintor, inventor, engenheiro etc. Em meio aos temas de geometria identificados no Códice Atlântico, estão: teorema de Pitágoras, volume de sólidos geométricos e o cálculo de área do triângulo retângulo e do retângulo, por exemplo.

Caro professor, neste texto de tese há outras informações sobre Da Vinci e o Códice Atlântico que poderão ser utilizadas para a elaboração do texto introdutório das UBP's. Então, você poderá elaborar e alterar o texto introdutório de acordo com seus objetivos de aprendizagem.

a) O texto fala que Leonardo da Vinci é considerado um dos maiores pintores de todos os tempos. Você concorda com essa afirmação? Busque informações sobre Leonardo da Vinci e justifique sua resposta.

b) O texto fala das obras “A Mona Lisa” e “A Última Ceia”. Você conhece essas pinturas? Faça uma busca na internet sobre elas e fale um pouco sobre sua história.

c) Leonardo da Vinci fez estudos científicos, dentre eles, sobre geometria. Pesquise em folhas do códice atlântico, que trata de geometria, e verifique: que geometria há nessas folhas? Você consegue identificar triângulos, retângulos, cubos e quadrados nessas nelas? Que outros objetos de geometria você consegue identificar?

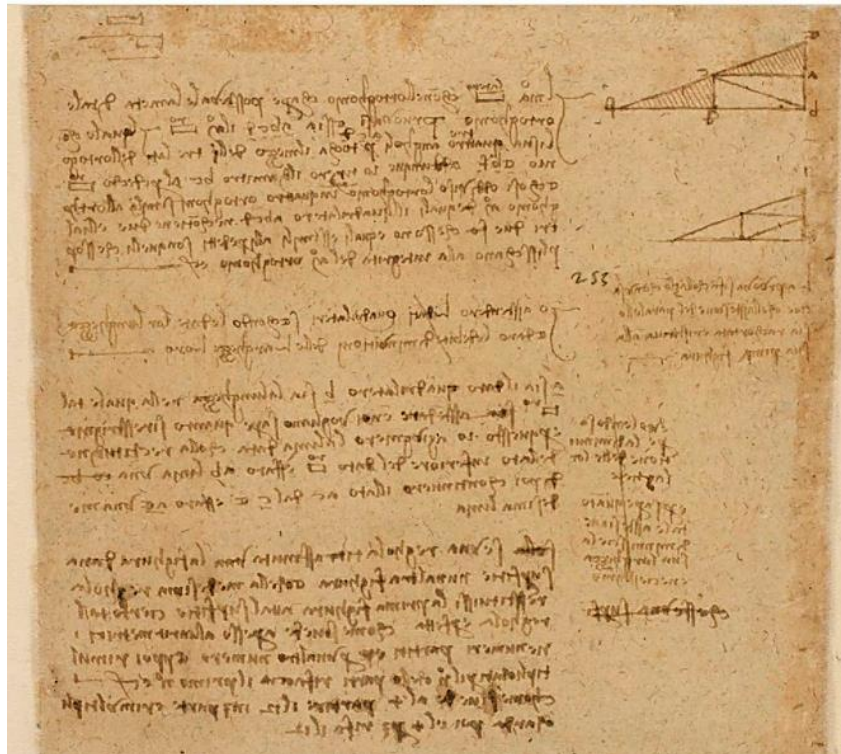
f) Diante das informações que você obteve, você diria que Leonardo da Vinci foi um artista, um cientista ou um geômetra? Por quê?

UBP 5: A folha 300r

Objetivo: Estabelecer relações entre o conteúdo da folha 300r e a geometria escolar.

Observe a figura 85, que retrata a folha 300r do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci.

Figura 85: Folha 300r



Fonte: Sanchez e Almarza (2008d, p. 85).

Para que seja feita a interpretação da folha retratada na figura 85, observe-a e faça as relações entre a nossa descrição e o que você percebe ao olhar para as anotações e desenhos de Leonardo da Vinci. Os apontamentos na folha se dividem em duas colunas: à esquerda, há quatro blocos de textos; e, à direita, dois desenhos, no canto superior direito, com outros dois blocos de textos abaixo deles.

Bloco de questões 1

- Quais suas primeiras impressões sobre a folha 300?
- O que chamou mais a sua atenção na folha?
- Você consegue identificar desenhos de geometria na folha? Quais?
- Você conhece o polígono chamado de retângulo? E o triângulo retângulo? O que caracteriza esses polígonos?
- Na folha 300 há algum retângulo ou triângulo retângulo? Por quê?
- Na folha há dois desenhos geométricos. Chame de desenho 1 o primeiro (de cima para baixo) e de desenho 2 o segundo. Quais as semelhanças e diferenças entre eles?
- Considere o desenho 1. Como você o descreve? Trata-se de um triângulo retângulo?

- h) Em quantas partes o desenho 1 foi decomposto? Que partes são essas?
- i) Você conseguiria representar o desenho 1 e as partes que o compõem?

Caro professor, a partir daqui faremos um estudo interpretativo da folha 300r na qual Da Vinci trata de uma relação entre o retângulo e o triângulo retângulo. Ele faz um procedimento que resulta na decomposição de um triângulo retângulo em polígonos menores: quatro triângulos retângulos e um retângulo que está inscrito no triângulo maior. Se for tomado como base o procedimento de Da Vinci e o desenho obtido, será possível fazer uma relação entre as áreas de todos os polígonos obtidos.

Os dois desenhos retratam triângulos retângulos com um retângulo inscrito, sendo que o primeiro possui alguns pontos identificados por letras, que estão escritas ao contrário, pois além de ser canhoto, Da Vinci escrevia da direita para a esquerda, ou seja, no sentido contrário do usual, o que é uma de suas características marcantes. É importante que o professor faça uma interpretação da folha antes de realizar as atividades com os estudantes. Apesar de as perguntas darem margem a respostas imprevisíveis, o conhecimento sobre a folha e as possíveis relações dela com a geometria escolar irão ser útil para conduzir os estudantes a estabelecer tais relações.

Afim de aprofundar o estudo da folha 300r, o texto seguinte é uma interpretação que fizemos dos desenhos de Leonardo da Vinci nela contidos. Tem como base uma descrição da folha e um desenho (figura 86) que elaboramos, mediante aqueles feitos por Da Vinci. Para que essa interpretação seja melhor compreendida, é interessante lê-la apoiada no desenho, ou seja, a leitura poderá se configurar em um vai e vem entre texto e desenho. A descrição da folha menciona que:

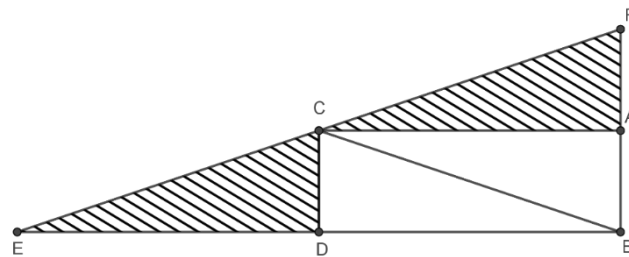
Se num triângulo retângulo, nos pontos médios de cada cateto, são traçadas as recíprocas paralelas, obtém-se um retângulo de superfície igual à metade do triângulo, e a diagonal de tal retângulo divide o triângulo em quatro triângulos iguais e equivalentes ao triângulo inicial (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 218).

De acordo com o procedimento descrito, o retângulo obtido “terá superfície igual à metade do triângulo”, ou seja, a área do retângulo equivale à metade da área do triângulo retângulo. Se nesse retângulo for traçada uma diagonal, “obtem-se quatro triângulos iguais”, isto é, de mesma área e que são “equivalentes ao triângulo inicial”. Esse último trecho significa, para nós, que somadas as áreas dos quatro triângulos menores, obtém-se a área do triângulo maior. Como os quatro triângulos têm mesma

área, cada um deles terá área igual à quarta parte da área do triângulo maior (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 218).

Observe que na figura 86 destacamos a parte da folha que contém o desenho do triângulo retângulo feito por Leonardo da Vinci. Fizemos uma ilustração em computador, que é uma recriação do referido desenho, com o objetivo de tornar as relações estabelecidas por ele mais compreensíveis.

Figura 86: Retângulo inscrito no triângulo retângulo



Fonte: Elaborado a partir de Sanchez e Almarza (2008d, p. 85).

O triângulo EBF tem como catetos os segmentos BE e BF, e como hipotenusa o segmento EF. O retângulo ABCD tem como vértices os pontos A, B, C e D, que tocam os lados do triângulo em seus respectivos pontos médios; e o vértice B coincide com o vértice do triângulo que contém o ângulo reto, característico do triângulo retângulo.

No triângulo retângulo EBF, de lados EF, BF e BE, temos que o ponto C é o ponto médio do segmento EF, o ponto A é o ponto médio de BF, e D é o ponto médio de BE. Traçando-se os segmentos DC e AC, teremos o retângulo ABCD, cuja diagonal é BC, e quatro triângulos EDC, CDB, CAB e CAF, além do triângulo maior EBF.

Para verificar se as afirmações contidas na descrição são verdadeiras, temos que provar que:

1) o retângulo ABCD tem superfície (área) igual à metade da superfície do triângulo EBF; e

2) que os triângulos EDC, CDB, CAB e CAF são congruentes.

Começamos pela prova 2.

Sabemos que a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos de mesma área, logo, CAB e CDB são congruentes. Como A é o ponto médio de BF, FA e BA, têm o mesmo comprimento, e CA é lado comum aos triângulos CAF e CAB, que são retângulos em A. Logo, esses triângulos têm dois lados e o ângulo entre eles congruentes. Assim, por LAL³⁹, esses triângulos são congruentes. De maneira análoga, EDC e CDB, que são retângulos em D, têm o lado CD em comum e ED e BD com a mesma medida, já que D é o ponto médio de EB. Assim, por LAL, EDC e CDB são congruentes. Como CAB e CDB são congruentes, EDC é congruente a CDB e CAF é congruente a CAB, os quatro triângulos em estudo são congruentes, ou seja, possuem mesma área.

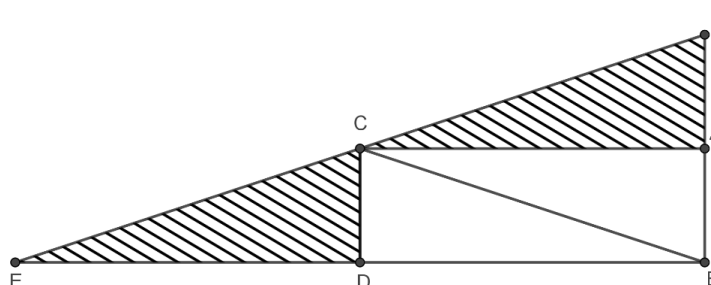
Essa conclusão é suficiente para a prova 1, pois se o triângulo EBF se subdivide em quatro triângulos menores de mesma área e o retângulo ABCD tem área equivalente a dois desses triângulos, logo, a área do retângulo ABCD equivale à metade da área do triângulo EBF. Portanto, o triângulo retângulo EBF tem área igual ao dobro da área do retângulo nele inscrito e igual ao quádruplo da área de cada um dos triângulos que o compõem no desenho de Leonardo da Vinci, na folha 300r.

De posse da interpretação que fizemos, o professor poderá elaborar problematizações em consonância com as particularidades dos estudantes aos quais a atividade se dirige. Apresentamos uma possibilidade como exemplo.

Bloco de questões 2: A decomposição do triângulo por Da Vinci

Observe o desenho retratado na figura 87.

Figura 87: Triângulo retângulo EBF



Fonte: Elaborado a partir de Sanchez e Almarza (2008d, p. 85).

³⁹ Dois triângulos são congruentes quando dois lados e o ângulo compreendido entre eles são, respectivamente, congruentes.

O item *i* do bloco de questões 1 traz as seguintes perguntas: “Você conseguiria representar o desenho 1? E as partes que o compõem? Quais se referem ao desenho principal da folha 300r do Códice Atlântico a qual você já conhece?” O esperado era que você fizesse um desenho semelhante ao que está na figura 3, e, em seguida, o decomponha em partes menores de acordo com seu entendimento.

- a) Há alguma semelhança entre o desenho que você fez e o qual fizemos?
- b) Quantos triângulos e quantos polígonos você identifica no desenho? Quais são?
- c) Como são classificados os polígonos do desenho em estudo?
- d) É possível estabelecer alguma conexão entre os polígonos que compõem o desenho e entre estes e o desenho maior? Que relações?
- e) Qual a fórmula utilizada para medir a área do retângulo? E para medir a área do triângulo retângulo? Pode-se relacionar essas fórmulas? Como?
- f) Há uma associação entre as fórmulas citadas no item anterior. Você acha que esse vínculo tem alguma correspondência com o desenho de Leonardo da Vinci?
- g) Como você explicaria as relações que utilizam os desenhos de Leonardo da Vinci na folha 300r?
- h) Considere que o triângulo EBF é retângulo em B. Qual a sua hipotenusa e quais os seus catetos?
- i) Suponha que a hipotenusa do triângulo EBF mede 10 cm e que um dos catetos mede 8 cm. Quanto mede o outro cateto? Utilize essas medidas para os itens seguintes.
- j) Qual a área do triângulo EBF?
- k) Pondere que os pontos A C e D são os pontos médios dos respectivos lados. Qual a área do triângulo CAF? E do triângulo CDE? E do retângulo ABCD?
- i) A diagonal do retângulo ABCD o divide em dois triângulos retângulos. Quais são e quais suas áreas? Qual a relação entre essas áreas e a área do retângulo ABCD?
- j) Qual a ligação entre a área do retângulo ABCD e a área do triângulo EBF?
- k) Avalie o desenho que estamos estudando. Faça novamente a sua decomposição em triângulos retângulos. Quantos triângulos retângulos você encontrou? Que relações podem ser estabelecidas entre esses triângulos retângulos a partir de suas áreas?

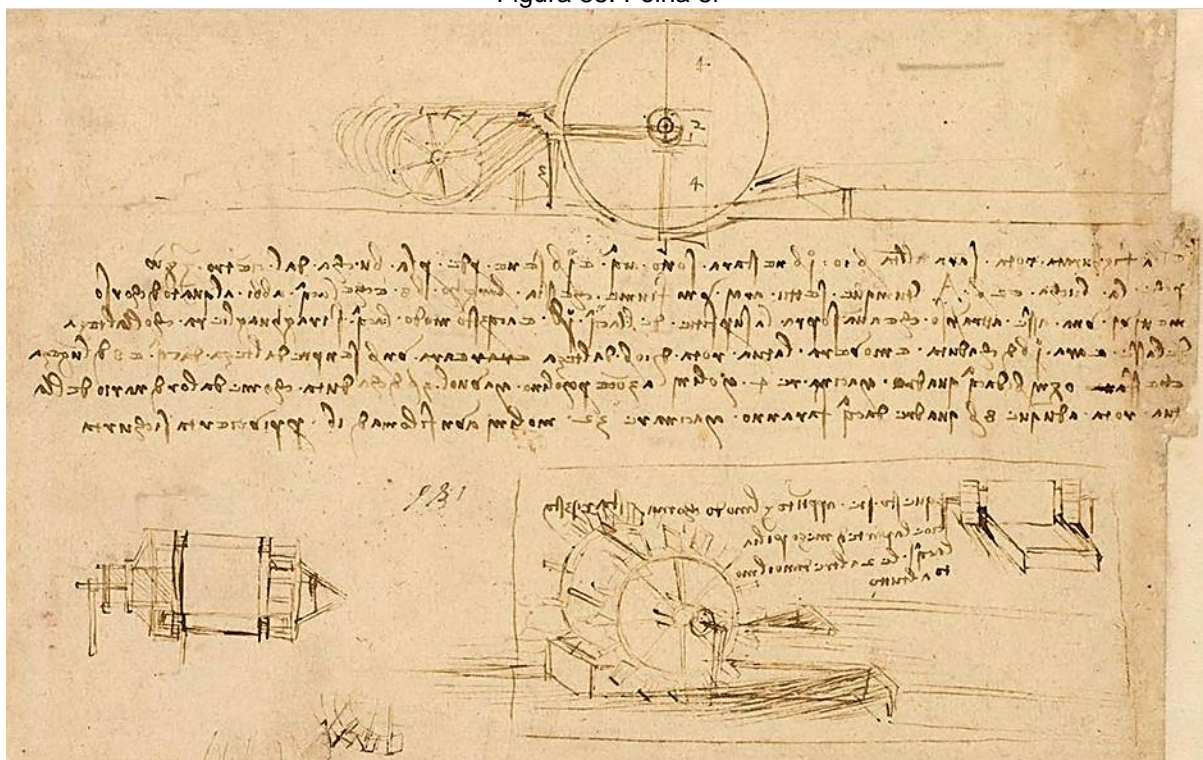
l) Pode-se afirmar que a área do triângulo EBF é o dobro da área do retângulo ABCD?

UBP 6: O moinho de água de Leonardo da Vinci para o esino de geometria plana

Objetivo: Relacionar o desenho de Leonardo da Vinci, na folha 8r, ao estudo de círculo, circunferência e triângulo retângulo.

A folha 8r apresenta, acima, uma roda de moinho de dez braços de diâmetro, movido por água, com anotação. Abaixo, outra roda de moinho tripartite, com anotação. À esquerda, detalhes da roda e das pás, sem escritos. O detalhe do desenho que selecionamos (figura 88) é o primeiro esquema de moinho no alto da folha. A interpretação do detalhe exprime uma leitura da imagem original, tendo em vista que, a nosso ver, o sistema acima é composto por duas rodas (circunferências) e um triângulo.

Figura 88: Folha 8r



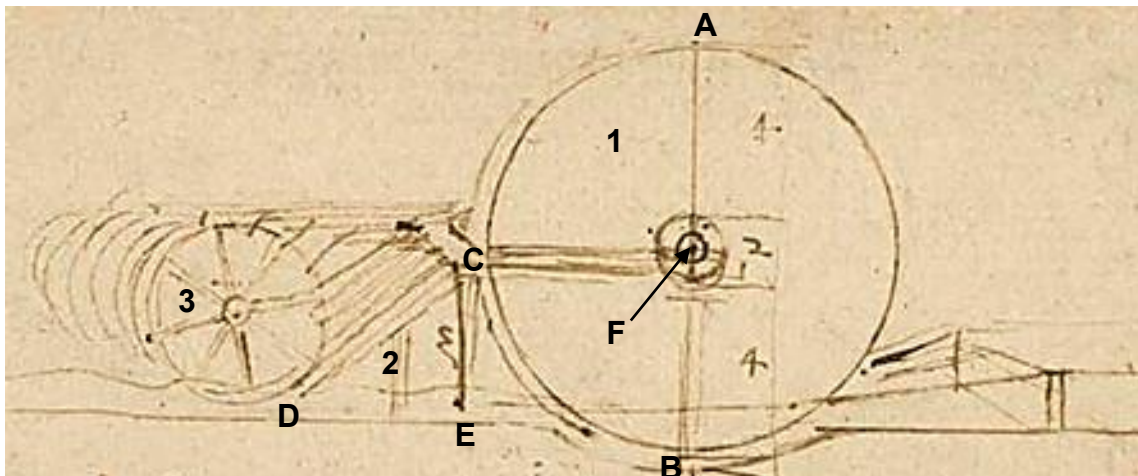
Fonte: Sánchez e Almarza (2008a p. 37).

Esse sistema de rodas que movimentaria um moinho, funcionaria da seguinte maneira: a roda 1 está submersa cerca de uma braça (até o ponto B) em um rio corrente. O fluxo de água gira a roda 1 que eleva a água (por meio de um sistema de conchas) até o ponto C, que está a 3 (três) braças de altura em relação ao ponto E. A

água, então, desliza por uma rampa que vai de C a D e seu fluxo faz girar a roda 3, por meio de um sistema de pás fixas a ela (MARTINS; MENDES, 2020).

Para que os objetos geométricos do desenho fosse reforçado, fizemos uma ilustração semelhante (figura 89), que remete a figuras geométricas planas, quais sejam, duas circunferências (1 e 3) e um triângulo retângulo (CDE). A circunferência 1 tem diâmetro 10 (dez) braças (conforme a transcrição do Códice), e a circunferência 2 tem diâmetro menor. A circunferência maior tem um “buraco” no centro (F), que pode ser representado por uma circunferência de diâmetro 2 (duas) braças. O detalhe em questão está melhor simbolizado na figura 89, que foi construído com vistas à conexão com a matemática da Educação Básica.

Figura 89: Moinho de água

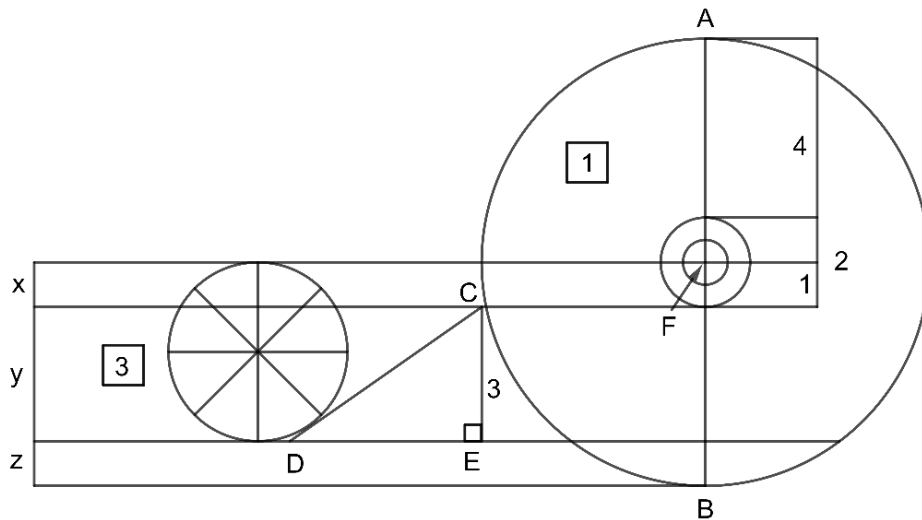


Fonte: Sánchez e Almarza (2008a p. 37).

Sobre a circunferência 3, foram traçados 4 (quatro) diâmetros que formam um ângulo de 45° entre si, ou seja, os diâmetros dividem a circunferência em 8 (oito) arcos de 45° cada um, e, ainda, em setores circulares cujo ângulo central é de 45° . Essa circunferência tem diâmetro 4 (quatro) braças (por construção), portanto, raio 2. O triângulo CDE é retângulo, e um de seus catetos mede 3 (três) braças.

A circunferência 1 de centro F possui duas circunferências concêntricas a ela, uma de diâmetro duas braças e outro de diâmetro desconhecido. A figura 90 possui alguns segmentos de reta, dos quais, destaca-se os segmentos x, y e z. $y = z = 1$ e $x = 3$, que podem ser relacionados aos diâmetros e raios das circunferências aos catetos do triângulo retângulo.

Figura 90: Esquema do moinho



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008a p. 37).

Os desenhos da folha 8r se conectam a alguns tópicos da matemática da Educação Básica que se inserem na geometria plana e analítica. Dentre esses, destacamos: Circunferência: definição de circunferência, centro, raio, diâmetro, corda, arco, ângulo, comprimento da circunferência, equação da circunferência (tópicos dos Níveis Fundamental e Médio); Círculo: definição de círculo, área do círculo, setor circular, área do setor, área da coroa circular (tópicos do Nível Médio); e, Triângulo: triângulo isósceles, triângulo equilátero, triângulo escaleno, triângulo retângulo, soma dos ângulos internos do triângulo (do 7º ano do Nível Fundamental) e teorema de Pitágoras (do 9º ano do Nível Fundamental) (BRASIL, 2017, 2007).

A partir da conexão feita com tópicos da matemática da Educação Básica, pode-se, então, problematizar essas informações para o ensino. As questões a seguir são exemplos dessa problematização que poderá favorecer o ensino dos tópicos que elencamos, anteriormente, no Nível Fundamental e Médio.

Bloco de questões 1: sobre o círculo 1

- a) Qual o diâmetro e o raio do círculo?
- b) Que relação há entre o diâmetro e o raio?
- c) Quantos diâmetros você visualiza na circunferência?**
- d) Considerando que o ângulo formado por dois diâmetros consecutivos é o mesmo em todos os casos, quanto mede cada um desses ângulos?
- e) Qual o comprimento do arco delimitado por dois raios consecutivos?
- f) Qual a área do círculo balizado pela circunferência em estudo?

g) Quantos setores circulares os diâmetros determinam?

Bloco de questões 2: Sobre o triângulo CDE

a) Supondo-se que o triângulo é retângulo e é isósceles, como você procederia para determinar o outro cateto e a hipotenusa desse triângulo? Quanto mede o outro cateto e a hipotenusa? Caracterize cateto, hipotenusa e triângulo isósceles. Qual a classificação de um triângulo quanto à medida de seus lados?

b) Entende-se que um dos ângulos internos do triângulo mede 90° , logo, qual é a medida dos outros dois ângulos internos? Que associação entre as medidas dos ângulos internos do triângulo você faria?

Bloco de questões 3: Sobre a circunferência 1

Tem-se no desenho três circunferências concêntricas (centro F), cujas medidas estão em braças. Leve em consideração que uma das duas circunferências menores têm diâmetro duas braças e a outra uma braça (tome como uma braça o equivalente a 2,20 metros e $y = z$).

a) Determine, em metros, o raio e o diâmetro de cada uma das três circunferências em questão. Estabeleça a razão entre o raio e o diâmetro de cada circunferência. O que você conclui a partir das razões encontradas?

b) Qual a área do círculo maior?

c) Qual o comprimento da circunferência de diâmetro maior?

d) Considere que as três circunferências concêntricas têm centro F (0, 0). É possível definir a equação de cada uma delas? Como?

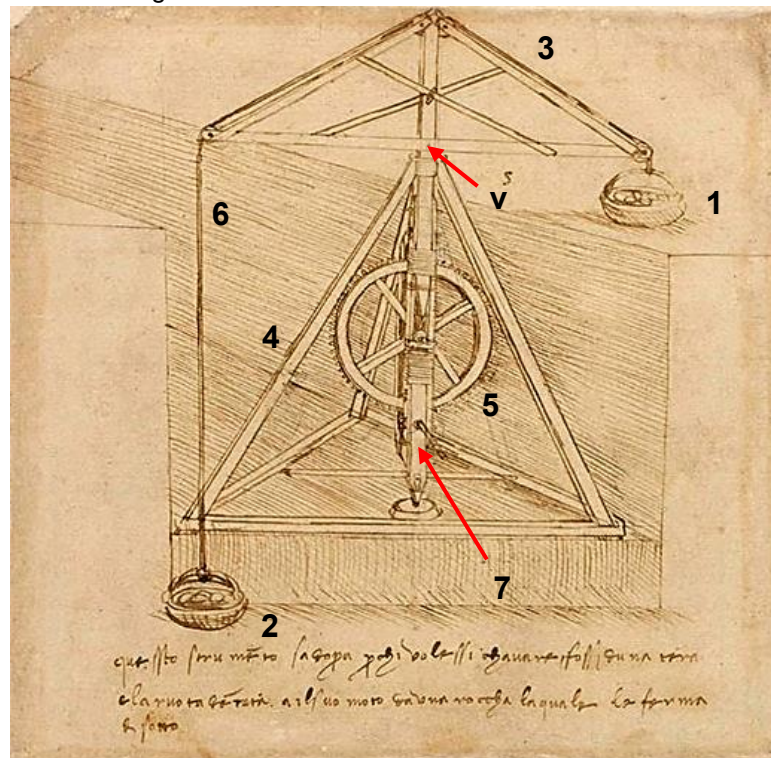
Realizamos um estudo da folha 8r do Códice Atlântico, para mostrar possíveis relações entre o seu conteúdo e os temas de geometria que fazem parte do currículo da Educação Básica. Nossa intenção é fornecer encaminhamentos pedagógicos para a sala de aula do professor que ensina matemática nesse nível. Ele poderá reformular a UBP de forma a atender às demandas do contexto no qual seus alunos se inserem, e os objetivos de aprendizagem a serem alcançados com a atividade proposta (MARTINS; MENDES, 2020).

UBP 7: O guindaste de Da Vinci

Objetivo: Discutir em sala de aula os possíveis temas de geometria que podem emergir do guindaste de Leonardo da Vinci.

A folha 54ar do Códice Atlântico, retratada na figura 91, contém o desenho de um guindaste que está dentro de uma valeta estreita, e serve para retirar a terra escavada de lá. Tem uma base triangular, que, juntamente com hastes, sustenta a viga vertical que contém uma engrenagem, que parece ser a peça que movimenta o guindaste. Inserimos algumas marcações no desenho para melhor descrevê-lo. (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Figura 91: Folha 54ar. Guindaste de Da Vinci



Fonte: Sánchez e Almarza (2008^a, p. 139).

O guindaste desenhado (figura 91) tem duas partes principais: a base (4), que remete a uma pirâmide de sustentação triangular; e, a parte superior (3), que envia a um triângulo isósceles obtusângulo. A corda (6) percorre toda a parte superior do triângulo (lados que formam o ângulo obtuso) e liga os recipientes 1 e 2, provavelmente usados para depositar o material (terra) a ser movido (elevado). A estrutura conta, ainda, com uma roda dentada (5), que encaminha a uma circunferência, e que está suspensa e presa a uma haste de madeira vertical (7), que parece descrever a altura da pirâmide, que vai do centro de sua base até o seu vértice (v).

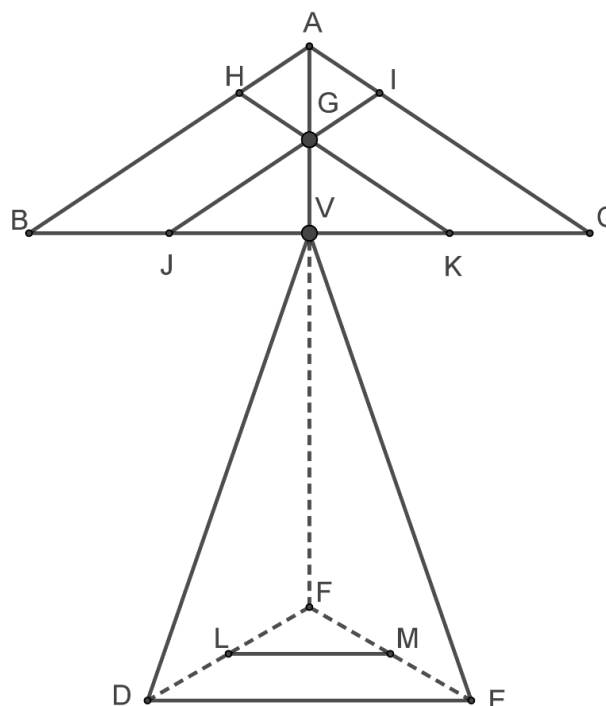
Mediante o desenho, identificamos que o funcionamento do guindaste remete a um movimento de giro da parte superior (triângulo 3), que poderá descrever uma

circunferência horizontal, cujo diâmetro tem a mesma medida da base horizontal do triângulo.

O desenho não expressa as medidas do guindaste. Construímos uma figura que conecta o desenho de Leonardo da Vinci a tópicos da matemática escolar do Nível Básico. Optamos por não incluir a circunferência (5) e a haste (7) na figura para que esta seja melhor compreendida, tendo em vista que muitos elementos poderão dificultar a percepção do desenho.

A parte superior da figura 92 é o triângulo isósceles ABC , cujo ângulo \hat{A} é obtuso. Os lados AB e AC têm mesma medida, e o lado BC é o maior dos três. O triângulo em estudo possui três segmentos de reta (AV , HK e IJ), que partem de seus lados e se cruzam no ponto G .

Figura 92: Esquema do guindaste



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008a, p. 139).

Com base em nossa experiência na docência na Educação Básica e nos documentos curriculares oficiais, sugerimos que o estudo dessa parte do desenho de Da Vinci possa ser mobilizado para o ensino dos seguintes objetos de aprendizagem:

- Classificação dos triângulos quanto aos ângulos internos (retângulo, acutângulo ou obtusângulo) e quanto à medida dos lados (equilátero, isósceles ou escaleno);

- Soma dos ângulos internos de um triângulo ($\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$);
- Área e perímetro do triângulo;
- Segmentos de reta;
- Ponto de intercessão;
- Plano cartesiano;
- Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$);
- Localização de pontos no plano cartesiano;
- Distância entre dois pontos: $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;
- Ponto médio e ponto médio: $M(x_m = \frac{x_A + x_B}{2}, y_m = \frac{y_A + y_B}{2})$.

Como já especificamos, a base remete a uma pirâmide de sustentação triangular (EFD) e vértice V, portanto, trata-se de um tetraedro. As faces da pirâmide são os triângulos DVF, EVF e DVE. Um segmento de reta (LM) está sobre a base e é paralelo à aresta DE. A Altura da pirâmide não foi identificada na figura, porém é um segmento que vai de V até a base, e é perpendicular à superfície desta. Da mesma forma como apontamos anteriormente, os objetos de geometria que poderão ser ensinados mediante o desenho de Da Vinci, especificamente a parte inferior, são:

- Caracterização de uma pirâmide;
- Elementos da pirâmide (aresta da base, aresta lateral, raio da base, apótema da pirâmide, apótema da base, altura da pirâmide);
- Tipos de pirâmides (reta, oblíqua, regular);
- Relação entre triângulo retângulo e pirâmides regulares;
- Área da superfície de uma pirâmide ($S_p = S_b + S_l$, onde S_b = área da base, S_l = área da superfície lateral e S_p = área da superfície total);
- Volume da Pirâmide ($V_p = \frac{S_b \cdot h}{3}$, onde, S_b = área da base e h é a altura da pirâmide);
- Relação entre volume do prisma e da pirâmide.

As associações entre o desenho e os tópicos de geometria listados poderão ser estabelecidas por meio de problematizações, ou seja, a partir de múltiplos questionamentos que o professor poderá lançar aos estudantes, e que terão que ter como objetivo conectar a figura e seus elementos aos tópicos de matemática a ela relacionados (listados anteriormente).

Bloco de questões 1: Sobre o triângulo ABC:

a) Considere o ângulo $\hat{A} = 110^\circ$ e $MedAB = MedAC$. Como pode ser classificado o triângulo ABC quanto aos ângulos internos? E quanto à medida dos seus lados? Qual a medida dos dois ângulos agudos do triângulo ABC? E do ângulo obtuso?

b) Pondere $BC = 6m$, $AV = 2m$ e que V divide o segmento BC ao meio, responda: Qual a área dos triângulos ABC, AVB e AVC? Quanto medem os segmentos AB e AC?

c) Sabendo-se que os segmentos BC e AV são perpendiculares, responda: Quantos triângulos fazem parte da figura limitada pelos segmentos AB, AC e BC? Quais desses triângulos são retângulos? O comprimento de AB e AC pode ser determinado pelo Teorema de Pitágoras? Explique.

d) Leve em consideração que o triângulo ABC está sobre o plano cartesiano e que o ponto V é a origem do sistema de coordenadas cartesianas. Julgue, ainda, as afirmações anteriores para responder: quais as coordenadas dos pontos A, B e C?

e) Se o ponto G é o ponto médio de AV, determine as coordenadas de G. Entendendo as coordenadas dos vértices do triângulo ABC, que método, diferente da utilização da fórmula para cálculo da área do triângulo, você utilizaria para determinar tal área?

f) Utilize a fórmula da distância entre dois pontos e calcule o comprimento de AC. Verifique se o valor é o mesmo que você já calculou anteriormente.

Bloco de questões 2: Sobre a pirâmide triangular

a) Sobre a caracterização de uma pirâmide responda: O que é uma pirâmide? Quais os seus principais elementos? Que figura geométrica se tem nas faces de uma pirâmide?

b) A respeito dos tipos de pirâmides: Como uma pirâmide pode ser classificada? O que é uma pirâmide reta? O que é uma pirâmide regular? Tetraedro regular é uma pirâmide? Por quê?

c) Relação entre pirâmide regular e triângulo retângulo. A uma pirâmide regular, podem ser associados triângulos retângulos? Mostre como isso é possível e relacione os lados de cada triângulo retângulo aos elementos da pirâmide.

As atividades que propomos são sugestões que poderão ser aprimorados para atender aos objetivos de ensino do professor, que será capaz de elaborar outras, com base nos desenhos de Leonardo da Vinci. As práticas são plausíveis de serem

estruturadas de forma que o estudante seja levado a fazer uma investigação sobre o tema, em busca de possíveis respostas. A intenção é que as tarefas não sejam uma lista de exercício a serem resolvidos, mas um momento de movimentação dos estudantes em torno de um objetivo. Os resultados obtidos pelos alunos na investigação poderão, ainda, ser socializados na sua turma e até com outros estudantes da escola.

UBP 8: As lúnulas de hipócrates e o teorema de pitágoras: um estudo da folha 389 do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci.

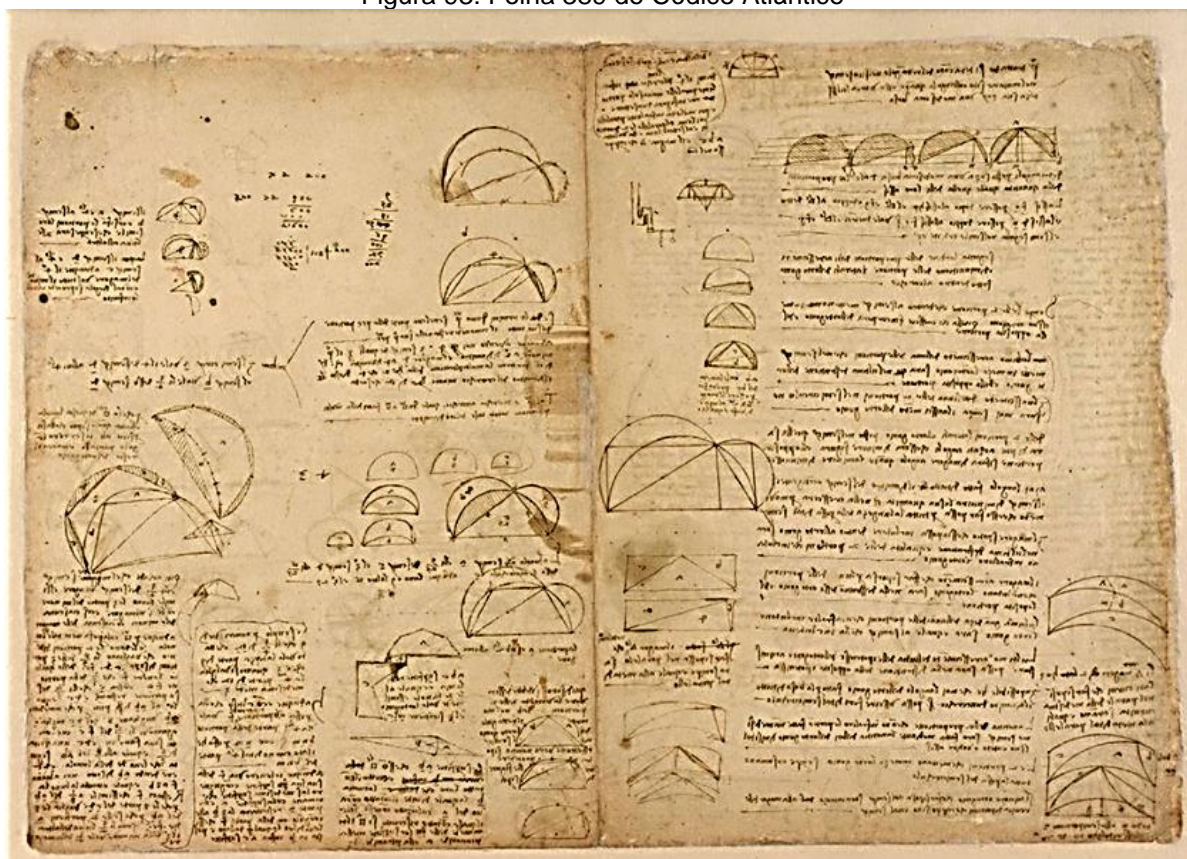
Caro professor, nesta UBP daremos algumas orientações que, somadas às anteriores, o ajudarão quando decidir elaborar uma atividade no formato de problematizações para aplicar em suas turmas.

Primeiro você precisa selecionar uma folha de acordo com a geometria que deseja que seus alunos aprendam. Para isso, você precisará fazer um estudo dessa folha para ver quais elementos dela irá problematizar. Como já declaramos anteriormente, as folhas do Códice Atlântico estão disponíveis no endereço <http://www.codex-atlanticus.it/#/Overview>, no entanto, você só irá encontrar mais informações sobre as folhas, como a descrição e a transcrição do texto de Leonardo da Vinci, em versões impressas, como a que usamos neste trabalho. Em sites da internet sobre vendas de livros é possível encontrar, também.

Depois de se apropriar das informações da folha e da geometria nela contida, você poderá elaborar a problematização. Para isso, inicie escrevendo um pequeno texto de apresentação da folha que contenha aspectos gerais e específicos sobre o contexto do conteúdo da folha. O texto pode ser similar ao que escrevemos a seguir.

A folha em estudo (figura 93) contém um grupo de desenhos e anotações feitas por Leonardo da Vinci. Trata-se da folha 389 do Códice Atlântico da Biblioteca Ambrosiana de Milão, retratada na figura 94. Na folha, o principal tema versado é a geometria, uma vez que Da Vinci, além de exímio pintor, foi um estudioso das ciências da sua época, a exemplo da geometria. Essa folha faz parte de estudos de Da Vinci sobre equivalência entre superfícies. Ele se interessava em comparar áreas de diferentes figuras geométricas, para obter relações de igualdade e/ou proporcionalidade entre elas, essencialmente, entre porções do círculo e dessas porções e superfícies poligonais.

Figura 93: Folha 389 do Códice Atlântico



Fonte: Sánchez e Almarza (2008g, p. 13).

A geometria é uma parte da matemática que envolve desenhos, e como Da Vinci era excelente desenhista, ele os manipulava de múltiplas formas, em busca das equivalências mencionadas. Usando régua e compasso, ele experimentava, por meio do desenho, e escrevia todos os resultados obtidos, fossem eles favoráveis, desfavoráveis, conclusivos ou parciais. Tudo era registrado por ele, tanto os desenhos quanto suas inferências sobre eles.

Observe a folha e verifique como há desenhos com formato curvo, desenhos de polígonos e anotações por toda a folha. O primeiro bloco de questões disserta sobre aspectos gerais a respeito do texto de apresentação da folha e sobre a folha.

Bloco de questões 1: aspectos gerais

a) O que você sabe sobre o Códice Atlântico da Biblioteca Ambrosiana de Milão? Faça uma pesquisa e diga: O que ele é? Quais os principais temas contidos nesse Códice?

b) Você já estudou áreas de figuras geométricas planas? Que estudos você fez sobre esse assunto? Em que série ou ano você estudou esse assunto?

c) Para você, o que é igualdade? E, o que é equivalência?

- d) O que seria equivalência entre superfícies planas?
- e) Você acha possível construir um polígono com mesma área de uma figura plana limitada por curvas?
- f) Você já fez desenhos geométricos com régua e compasso nas aulas de matemática?

Caro professor, intercalamos um texto com informações sobre a folha e um bloco de questões. Você poderá seguir esse formato ou organizar a UBP do modo que mais se adequar ao seu contexto.

A folha trata da equivalência de superfícies planas. Mas o que Leonardo da Vinci pretendia com a busca da equivalência? O estudo da equivalência de superfícies remonta à Antiguidade grega e se relaciona à quadratura de superfícies estudadas por meio de figuras geométricas planas. Fazer a quadratura de uma figura geométrica plana consistia em construir, com régua não graduada e compasso, um quadrado correspondente a essa figura, ou seja, um quadrado que tivesse a mesma área da figura dada, que poderia ser um polígono, um círculo ou parte de um círculo.

O problema da quadratura de polígonos foi resolvido pelos estudiosos da Antiguidade grega. No entanto, sanada essa questão, como fazer a quadratura do círculo? O problema da quadratura do círculo, como ficou conhecido, reuniu esforços de estudiosos da matemática, e de outras áreas, por mais de 2 (dois) mil anos, e que resultaram em diferentes tentativas de solução que, inclusive, geraram conhecimento novo em geometria e em outros temas da matemática (CAJORI, 2007; KATZ, 2010).

Leonardo da Vinci estudou a quadratura de polígonos e a quadratura do círculo, com equivalências que ele registrou na folha 389 (dentre outras), e que teriam sido motivadas pela procura de soluções para o problema da quadratura do círculo. Nessa folha específica, ele busca as equivalências por meio das lúnulas de Hipócrates de Chios, que teria vivido na Grécia, no século V (a. C.) (OZANAM, 1814).

Bloco de questões 2: O contexto geométrico da folha

Caro professor, neste bloco você fará questões relacionadas ao contexto mais específico da geometria, exposto na segunda parte do texto.

- a) Você acha provável quadrar um retângulo? E um triângulo? Seria possível transformar qualquer polígono em quadrado? Desenhe um polígono e tente transformá-lo em quadrado?

b) Para você, o que é um polígono? E um polígono regular? Quais polígonos regulares você conhece? O que é um quadrado? E um retângulo? E um triângulo?

c) Você já estudou quadrado, retângulo e triângulo? E círculo? Círculo é o mesmo que circunferência?

d) O que seria um círculo? E uma Circunferência? Há diferenças entre eles?

f) Como se mede a área de um círculo? E do quadrado? E do retângulo? E do triângulo?

g) Há alguma relação entre a área do quadrado e do triângulo? E entre a área do retângulo e do triângulo?

h) Retângulo e quadrado são a mesma figura? Existe diferenças entre eles? Quais?

i) Você conhece o problema da quadratura do círculo? Faça uma pesquisa a respeito e fale um pouco sobre ele.

j) Você acha viável construir um quadrado com mesma área de um círculo? Tente fazer.

k) Você já havia escutado a palavra lúnula?

l) Pesquise um pouco e diga, o que é uma lúnula?

m) Por que o nome lúnulas de hipócrates? Quem foi Hipócrates de Chios?

n) Dentre os desenhos de Leonardo da Vinci, na folha 389, há triângulos, retângulos, quadrados, círculos ou partes de círculo? Marque na folha os quais você consegue identificar?

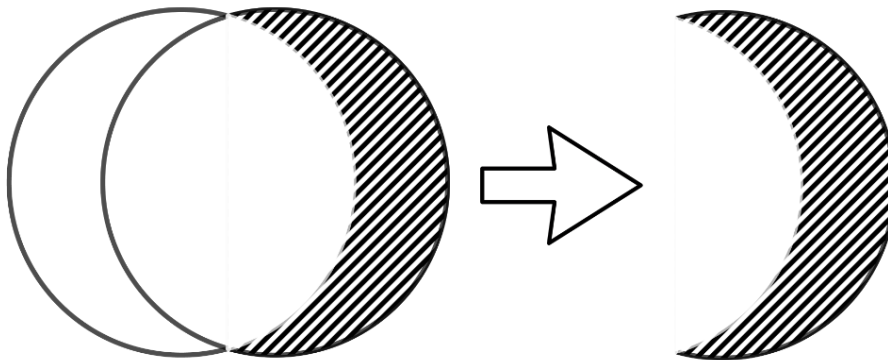
o) Existe alguma lúnula entre os desenhos? Marque as lúnulas que você consegue distinguir.

p) É possível que Leonardo da Vinci estivesse tentando mostrar que as lúnulas têm mesma área que os retângulos? Ou que elas teriam mesma área de um triângulo?

Caro professor, agora o texto irá tratar das lúnulas e da sua relação com a folha, afinando, mais ainda, a discussão sobre o tema da folha.

Lúnulas são regiões planas limitadas por arcos de circunferências. Podem ser obtidas pela sobreposição de círculos, de forma que as circunferências mantenham dois pontos de intersecção, como na figura 94. Observe que são geradas duas superfícies, como a que foi destacada, que é chamada de lúnula ou lua, devido ao formato.

Figura 94: Lúnula



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008g, p. 13)

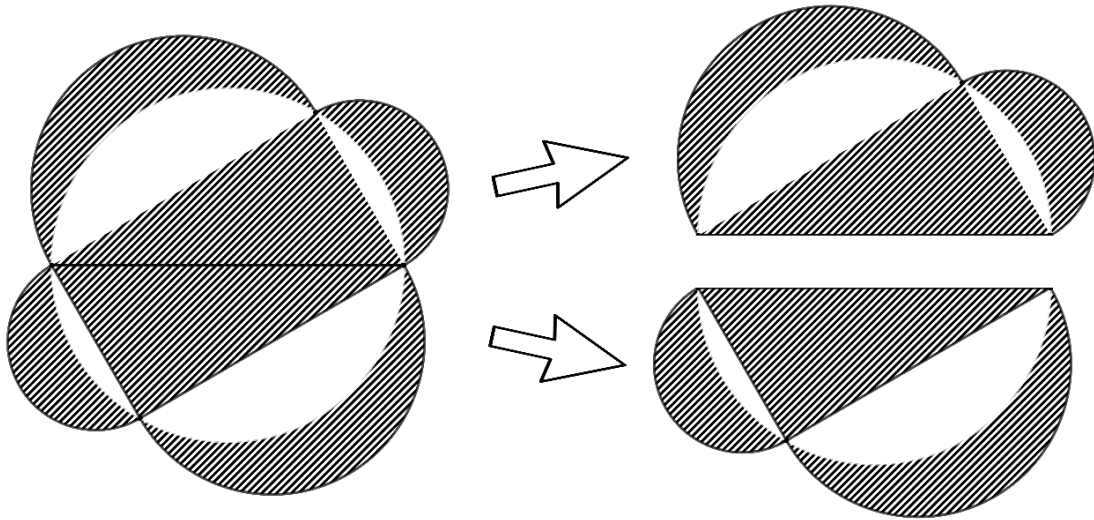
O estudo das lúnulas, feito por Hipócrates e outros estudiosos do tema, associou a superfície delas a outras de polígonos inscritos nas circunferências, cuja intersecção origina as lúnulas. Dessa forma, esse conhecimento envolveu a inscrição de polígonos como triângulo, quadrado, retângulo e hexágono, cujos lados são os diâmetros das circunferências reveladas. Veja como obter lúnulas a partir da inscrição do retângulo:

- ✓ Trace uma circunferência c ;
- ✓ Inscreva um retângulo nela;
- ✓ Marque o ponto médio de cada lado do retângulo inscrito;
- ✓ Escolha um dos lados do retângulo;
- ✓ Centre o compasso no ponto médio do lado escolhido e trace uma circunferência de raio igual à metade do lado, ou seja, o diâmetro da circunferência será o lado do retângulo;
- ✓ Agora, repita o último procedimento para os outros três lados do retângulo, que irá resultar em 5 (cinco) circunferências.

Mediante o desenho feito, você pode identificar, conforme a figura 95, que há 4 (quatro) regiões externas à circunferência maior.

Essas regiões são limitadas, internamente, por um arco da circunferência maior e, externamente, cada uma por um arco das circunferências menores. Essas regiões são lúnulas, que fazem parte das estudadas por Hipócrates. E elas têm arco externo igual a um semicírculo. Se for traçada uma das diagonais do retângulo inscrito, o desenho origina dois triângulos retângulos, cuja hipotenusa é o diâmetro do círculo maior e os catetos são os diâmetros de cada um dos círculos menores.

Figura 95: Lúnulas e o retângulo inscrito



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008g, p. 13)

Bloco de questões 3: As lúnulas de Hipócrates

a) Usando régua e compasso, desenhe circunferências sobrepostas, como as da figura 96, e tente variar essa sobreposição. É possível obter lúnulas diferentes, mudando a posição das circunferências? Observe os arcos que limitam as lúnulas e diga: Quais seriam essas diferenças?

b) Por que você acha que o estudo das lúnulas foi feito a partir da inscrição de polígonos na circunferência?

c) Essa inscrição tem relação com a equivalência das figuras envolvidas no estudo?

d) Você já estudou inscrição de polígonos?

e) Você sabe fazer a inscrição de um retângulo no círculo? E do triângulo?

f) Siga o procedimento descrito e construa o desenho. Você consegue identificar as lúnulas? E o retângulo?

g) Essas lúnulas têm arco externo igual a um semicírculo, maior que um semicírculo ou menor que um semicírculo?

h) A divisão feita na figura x originou dois desenhos similares. Considere um deles e observe a folha 389r. Que relações você faz entre o desenho e a folha com registro de Leonardo da Vinci? Há desenhos na folha 389r e o desenho da figura x? Faça marcações na folha e identifique os desenhos similares ao desenho da figura x.

i) Você acha possível associar a área das lúnulas à área do triângulo obtido?

j) Trata-se de que tipo de triângulo?

k) Que famoso teorema é associado a esse triângulo?

- l) Qual é a hipotenusa e qual os catetos do triângulo retângulo?
 m) Qual o enunciado do teorema de Pitágoras?
 n) O teorema de Pitágoras tem ligação com a equivalência entre as lúnulas e o triângulo? Qual?

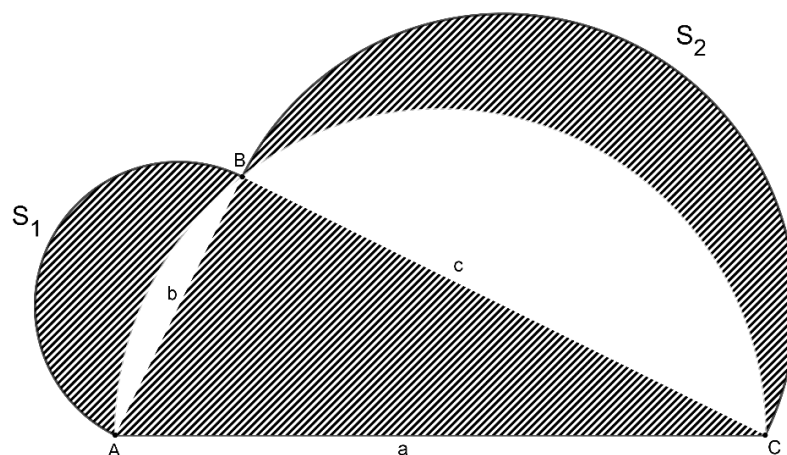
o) A área do triângulo retângulo é a mesma de uma das lúnulas? Qual? Ou a área do triângulo é igual à soma das áreas das duas lúnulas?

p) Como seria possível provar a equivalência entre a área das lúnulas e do triângulo retângulo?

Caro professor, continuando a discussão da folha, este conteúdo dialoga a respeito de uma demonstração da equivalência estudada por Da Vinci. Do modo como a fizemos, não está na folha, já que Leonardo da Vinci usava desenhos e textos no lugar das expressões algébricas. Você poderá apresentar esse raciocínio para os estudantes ou conduzi-los de modo que eles o recrie.

Analise a figura 96. Nela, considere a superfície total (S) e as superfícies do semicírculo AB (S_{AB}), semicírculo BC (S_{BC}), semicírculo AC (S_{AC}) e o triângulo ABC (T), cujos catetos são b e c , e a hipotenusa é a . Além disso, os lados do triângulo são a , b e c , respectivamente aos diâmetros dos semicírculos AC , AB e BC , e, como sabemos, o raio é a metade do diâmetro.

Figura 96: Equivalência triângulo e as lúnulas



Fonte: Elaborado a partir de Sánchez e Almarza (2008g, p. 13)

Observe que: $S = S_{AB} + S_{BC} + T$, ou seja, $S = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{bc}{2}$

Perceba que se da área S você retirar S_{AC} , restará, somente, a área das duas lúnulas, ou seja: $S - S_{AC} = S_1 + S_2$. Assim:

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{bc}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{4} \right) + \frac{bc}{2}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \right) + \frac{bc}{2}$$

Atinamos que pelo teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$, substituindo na equação, teremos: $S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a^2 - a^2}{2} \right) + \frac{bc}{2}$ e como $a^2 - a^2 = 0 \rightarrow S_1 + S_2 = \frac{bc}{2}$. Mas a área do triângulo retângulo é o produto da base pela altura dividido por 2, ou seja: $T = \frac{bc}{2}$ e como $S_1 + S_2 = \frac{bc}{2}$ conclui-se que $S_1 + S_2 = T$. Assim, provou-se que a soma das áreas das lúnulas da figura x é igual à área do triângulo retângulo.

Bloco de questões 4: Uma demonstração da equivalência de superfícies

Caro professor, neste último bloco você pode elaborar questões sobre a demonstração da equivalência.

a) Na prova anterior, relacionada à figura 96, concluiu-se que a soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo retângulo. E com relação ao retângulo inscrito figura x, o que se pode concluir? Há relação entre a área desse retângulo e das 4 (quatro) lúnulas?

b) No caso da figura 96, obteve-se a quadratura da lúnula ou das lúnulas, ou seja, foi encontrado um quadrado equivalente às lúnulas s_1 e s_2 ?

c) O que você achou da demonstração que fizemos?

d) Você acha que ela pode ser feita de outra maneira? Como?

e) Você compreendeu a demonstração?

f) Desenhe as lúnulas separadamente e tente comparar as superfícies com a superfície do triângulo?

g) Pelo raciocínio apresentado foi possível obter a quadratura das lúnulas?

h) Realize os seguintes procedimentos:

✓ Faça um desenho como o da figura x.

✓ Determine o ponto médio do cateto b e do cateto c.

- ✓ Agora, construa um quadrado cujo lado mede a metade do cateto b e outro quadrado de lado igual à metade do cateto c .
- ✓ Calcule a área desses dois quadrados.

i) Que relações são possíveis estabelecer entre as áreas dos quadrados e das lúnulas? E entre as áreas dos quadrados e do triângulo retângulo?

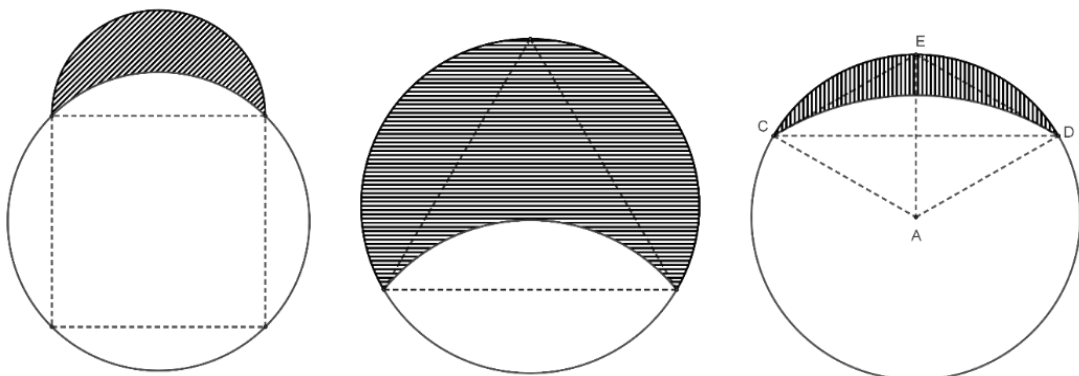
Caro professor, esperamos que as orientações o ajudem na elaboração de atividades no formato de UBP. A ideia central é que você parta do contexto geral para o mais específico, ou seja, você contextualize a folha, a geometria da qual ela trata e, por último, um objeto específico que deseja destacar no estudo. A problematização 8 é bem extensa, logo, você poderá dividi-la em partes menores e explorar outros aspectos que não exploramos aqui.

A problematização 8 trata de circunferência e círculo, retângulo, triângulo retângulo, além dos elementos desses objetos geométricos e da equivalência entre superfícies, por meio das lúnulas. Além desses temas, ela contém elementos históricos que podem ser melhor explorados. Dessa forma, essa atividade pode ser ampliada e trabalhada como *uma unidade de ensino* sobre figuras geométricas planas e as possíveis relações entre elas. Um exemplo dessa ampliação é a problematização 9, que disserta sobre outros aspectos das lúnulas de Hipócrates.

UBP 9: Lúnulas de Hipócrates relacionadas ao quadrado e ao hexágono.

Há, basicamente, três tipos de lúnulas: 1) com arco externo igual a um semicírculo; 2) com arco externo maior que um semicírculo; e, 3) com arco externo menor que um semicírculo. Veja, na figura 97, os três tipos (da esquerda para a direita).

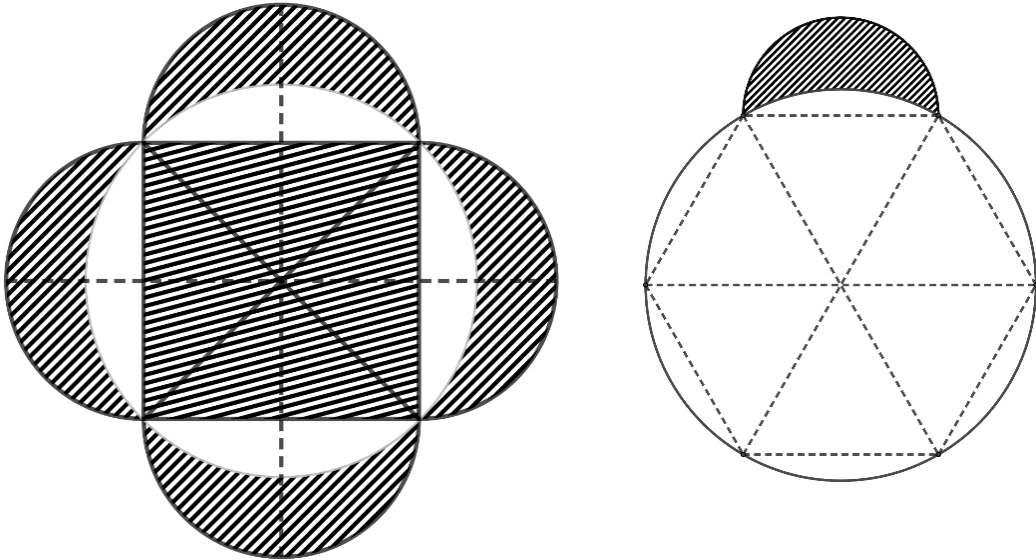
Figura 97: Três tipos de lúnulas



Fonte: Elaborado a partir de Ozanam (1814, p. 403).

Lúnulas do tipo 1 podem ser relacionadas a polígonos inscritos na circunferência, como, por exemplo, o quadrado e o hexágono. Na figura 98, podemos observar as lúnulas feitas sobre o lado do quadrado inscrito (à esquerda) e do hexágono inscrito (à direita).

Figura 98: Lúnulas e a inscrição de polígonos



Fonte: Elaborado a partir de Ozanam (1814, p. 403).

Caro professor, antes das problematizações seguintes, os estudantes devem ter acesso à demonstração da equivalência entre a área das lúnulas e do triângulo retângulo, feita anteriormente. Ou, você pode conduzi-lo a comprovar, de forma, semelhante, as relações entre as lúnulas e o quadrado, e entre elas e o hexágono, inscritos.

a) A partir da demonstração, comprovação feita anteriormente, como seria possível atestar que, no caso do quadrado inscrito, ocorre a mesma equivalência? Ou não ocorre tal equivalência?

b) E no caso do hexágono inscrito, é provável que haja alguma equivalência entre as lúnulas e a superfície do hexágono, como seria essa confirmação?

c) Depreenda que o quadrado inscrito na circunferência pode ser dividido em 2 (dois) ou em 4 (quatro) triângulos, que podem ser classificados em isósceles, equiláteros, retângulos, escalenos. Que relação esses triângulos têm com as lúnulas feitas sobre os lados do quadrado?

d) Um hexágono pode ter sua superfície subdividida em partes, que pode gerar trapézios, paralelogramos e triângulos, em que alguns têm uma relação muito particular com o hexágono inscrito na circunferência, que nem o da figura x. Refaça o desenho do referido hexágono e identifique os polígonos que podem ser derivados pela subdivisão da sua superfície. Calcule a área desses polígonos de resposta: a soma dessas áreas é igual à área do hexágono que os originou?

e) Para isso, você terá que calcular a área do hexágono. Como calcular essa área?

f) Um hexágono pode ser subdividido em 6 (seis) triângulos congruentes (entre si)? Como estes podem ser classificados?

g) Que vínculos esses triângulos podem estabelecer com a área do hexágono?

h) Que conexões esses triângulos são capazes de determinar com a área das lúnulas feitas sobre o lado do hexágono?

i) No caso do quadrado inscrito, é possível obter a quadratura das lúnulas?

j) E no caso do hexágono, é viável quadrar as lúnulas?

Além das problematizações já formuladas e materializadas neste texto, há outras possibilidades para o provável estabelecimento de relações entre a geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e a geometria escolar. Referimo-nos, aqui, a pequenos projetos de investigação que abordaremos a seguir.

Investigação histórica no Códice Atlântico

Apresentamos a investigação histórica no Códice Atlântico como encaminhamentos pedagógicos para o docente que ensina matemática na Educação Básica, pois tal estudo poderá ser materializado pelo planejamento e implementação de pequenos programas que contemplem professores e/ou estudantes desse nível. Segundo Mendes (2009a, p. 97), o uso de projetos de investigação histórica no ensino de matemática poderá possibilitar aos alunos “o exercício da leitura, da escrita e da discussão de ideias matemáticas, bem como suas relações com outras áreas de conhecimento”, como a História, as Artes, a Arquitetura e a cultura específica de uma época e lugar.

As relações referenciadas poderão ser estabelecidas pelo estudante e pelo professor, mediante sua participação ativa nos projetos de investigação histórica no

Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, visto que essa busca poderá conduzir os envolvidos aos contextos histórico, social, cultural, artístico, matemático e filosófico da época de Leonardo da Vinci e de seus estudos materializados nas folhas do Códice. Os projetos poderão ser elaborados por professores da Educação Básica, para serem desenvolvidos com seus alunos, ou por entidades responsáveis pela formação inicial e continuada de docentes, no intuito de aprimorar nessas formações.

A partir dos estudos de Mendes (2009a, 2009b, 2015), apresentamos um esboço que poderá auxiliar no planejamento e execução do projeto, com a possibilidade de ser modificado e adaptado para cada contexto escolar específico. Esse material se refere a um projeto de investigação histórica no códice atlântico, feito por estudantes da Educação Básica.

Título: Relações entre a geometria refletida no Códice Atlântico e a geometria escolar.

Objetivo: Investigar as folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci em busca de objetos da geometria escolar.

Público Alvo: Estudantes da Educação Básica.

Material de estudo: Códice Atlântico impresso e digital, livros didáticos de matemática e outras leituras complementares sobre o tema.

Planejamento: A exemplo desse esboço, o professor de matemática poderá produzir um texto que sintetize as principais ideias e ações constituintes do projeto de investigação histórica no Códice Atlântico. Sugestionamos que o docente faça leituras sobre o tema e se fundamente nos estudos de Mendes (2009a, 2009b, 2015) a respeito de investigação histórica e ensino por investigação. Essas leituras poderão auxiliar o profissional a formular e implementar essa metodologia. A essência será o desenvolvimento de um trabalho de pesquisa no códice atlântico para que os estudantes desenvolvam a habilidade de identificar a geometria refletida nas folhas e a relacione com a geometria escolar.

De modo resumido, uma investigação histórica no Códice Atlântico toma como fonte de estudo uma folha ou um grupo de folhas do Códice, averiguando-a de modo a confrontar o conteúdo da folha a objetos da geometria escolar, além de os associar aos aspectos históricos, como a história da arte e da geometria, por exemplo.

Sensibilização dos participantes: A sensibilização e participação no projeto dependerá de como este vai se desenvolver. Poderá ser otimizado como uma unidade de ensino e compor as aulas regulares de uma determinada turma. Nesse caso, todos

os estudantes deverão participar. Mas se for, apenas, uma atividade complementar às aulas de matemática, a participação pode ser voluntária. Cabe ao professor definir qual a melhor metodologia a ser implementada e o modo de sensibilização e de participação dos estudantes.

Realização do projeto: Caso o projeto de investigação histórica tenha como foco uma anuidade de ensino de geometria, como, por exemplo, polígonos regulares, o seu desenvolvimento poderá acontecer nos horários destinados às aulas de matemática de cada turma, além de ser adicionado com atividades extraclasse. Caso tenha caráter complementar às aulas de matemática, poderá ocorrer no contraturno dos estudantes ou aos finais de semana, para não conflitar com as demais atividades escolares dos alunos.

Atividades do projeto: O projeto será realizado por meio da investigação histórica em folhas do Códice Atlântico. Os estudantes poderão ser organizados em grupo e o professor deverá definir as folhas a serem estudadas por cada grupo, ou deixar que os alunos fiquem livres para selecioná-las. Isso pode ser feito por meio das seguintes etapas:

- ✓ Estudo exploratório inicial do Códice Atlântico para que os estudantes possam ter o primeiro contato com o Códice e conhecer seu conteúdo. É importante que essa atividade seja livre para que os alunos adquiram a capacidade de formular suas primeiras conjecturas;
- ✓ Estudo com foco no conteúdo de geometria escolar, que poderá ser mediado pela utilização do livro didático de matemática. Os registros dos resultados devem ser feitos;
- ✓ Socialização dos resultados iniciais obtidos e discutidos pelo grupo para que sejam feitos aprimoramentos;
- ✓ Retorno ao Códice Atlântico para nova investigação;
- ✓ Exposição dos resultados do projeto para os estudantes da turma e de outras turmas da escola.

Todas as atividades do projeto poderão ser registradas (texto, áudio ou vídeo) para posteriormente ser elaborado um relatório, que poderá ser disponibilizado para publicações.

Esse projeto proporciona sua realização com estudantes do Ensino Fundamental e/ou Médio, e ter como objetivo final uma exposição dos trabalhos feitos pelos estudantes. Para além da geometria escolar, a proposta facilita ter como um dos

focos o contexto histórico e sociocultural da época de Leonardo da Vinci, sua vida e obra, e o Códice Atlântico.

É um planejamento que pode ser desenvolvido ao longo de dois meses (um ciclo avaliativo na Educação Básica), com encontros para orientações, pesquisa e feitura do trabalho. No final desse ciclo, ocorreria a culminância com exposição (por meio de cartazes, banners, maquetes etc.) para toda a comunidade escolar.

Projetos de investigação histórica no Códice Atlântico têm a capacidade de ser delineados e potencializados em um público alvo de docentes que ensinam matemática na Educação Básica, e obter como um dos resultados finais a elaboração de Unidades Básicas de Problematização, similares as que executamos. Assim, a investigação histórica feita por professores em formação, inicial ou continuada, poderá ser uma etapa anterior à produção das UBP's e sua implementação nas aulas de matemática.

Os dois encaminhamentos pedagógicos que descrevemos são a materialização do que foi anunciado no início do trabalho, em relação às implicações pedagógicas do estudo para o ensino e na Educação Básica, que transversalizam a formação de professores que ministram matemática nesse nível. Esperamos que as orientações possam nortear a prática do docente e o leve a refletir sobre a possibilidade de inserir nessa prática métodos que tenham como princípios filosóficos a investigação, a problematização e o estabelecimento de múltiplas relações do saber matemático (escolar) com outras áreas de conhecimento.



CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO

Nesta parte do trabalho de pesquisa realizado, abordam-se reflexões, pensamentos e análises finais, por meio da retomada da questão, hipótese e objetivos preestabelecidos para confirmar o que foi alcançado, além de destacar resultados e apontar algumas contribuições do estudo e os seus possíveis desdobramentos.

O termo considerar pode ser entendido como *refletir sobre algo, pensar sobre, analisar* e, consideração, por sua vez, como *o ato de considerar*⁴⁰. Como estamos escrevendo as considerações sobre o estudo que fizemos, versaremos sobre nossas reflexões, pensamentos e análises finais sobre o trabalho feito, ou seja, são análises sobre as análises já feitas neste ensaio, uma espécie de meta-análise. Assim, inicialmente, queremos estabelecer alguns pontos de partida para que o pensamento e o seu objetivo, o texto, fluam de forma mais organizada.

A priori, falaremos da questão, hipótese e objetivos preestabelecidos (apesar de ser um pouco repetitivo, consideramos necessária essa retomada), na sequência, trataremos de algumas contribuições que este trabalho trouxe e ainda poderá trazer para a formação pessoal dos seus autores, para o ensino de matemática, para a formação de professores que ensinam matemática, para a aprendizagem em geometria e para o campo de pesquisas em Educação Matemática. Por fim, dissertaremos sobre o que almejamos para o futuro em relação a este estudo e seus possíveis desdobramentos.

Inversamente à sequência do início do texto, começemos pelos objetivos específicos, que se traduziram nas ações práticas da pesquisa às quais nos propusemos, a saber: *Explorar investigativamente objetos geométricos do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci; selecionar as folhas do Códice Atlântico cuja geometria refletida se relaciona aos objetos da geometria escolar; analisar as folhas do Códice Atlântico escolhidas sob um enfoque da semiótica e leitura de imagens matemáticas; elaborar encaminhamentos pedagógicos para a geometria escolar, a partir dos resultados da análise semiótica das folhas investigadas.*

A exploração investigativa no Códice Atlântico foi a primeira ação da pesquisa, e foi de fundamental importância para que conhecêssemos o conteúdo desse material e como ele está disposto nos 10 (dez) volumes que estudamos. Essa pesquisa foi relevante pelos conhecimentos obtidos e, principalmente, pelas dúvidas que ela nos suscitou. Possibilitou que começássemos a identificar, nas folhas do Códice, desenhos e anotações sobre temas recorrentes nos 10 (dez) volumes e a reconhecer a existência de temas com uma quantidade elevada de folhas, como quadratura do círculo, e outros com poucas folhas, como os escritos literários (as facécias). Ademais,

⁴⁰ Fonte: dicionário on-line da língua portuguesa: <https://www.dicio.com.br/aurelio-2/>. Acesso em 11/11/2020.

concluímos que teríamos dificuldades em entender os desenhos e os seus significados, pelo fato de uma parte considerável das folhas conter imagens que não se relacionavam, ilustrações sobrepostas, manchas, desenhos apagados pela ação do tempo. Além desses fatores, o texto de Da Vinci, escrito em italiano arcaico, ao contrário e em letras pequenas, tornou quase impossível a sua compreensão a olho nu.

Mas felizmente, percebemos que os 10 (dez) volumes continham uma descrição, a transcrição do texto de Da Vinci e algumas notas explicativas (para cada folha), que foram fundamentais para que concebêssemos o contexto de todas as 602 (seiscentas e duas) folhas, mais específico daquelas da categoria Geometria e mais profundamente das 13 (treze) folhas analisadas. Mesmo com o auxílio dos aparatos críticos mencionados, enfrentamos dificuldades no estudo inicial, pois Da Vinci, por meio de seu pensamento analógico, estabeleceu relações entre áreas de conhecimento e coisas aparentemente sem conexão, impossibilitando nosso entendimento, uma vez que não possuímos uma mente como a dele, a ponto de fazer as mesmas conexões e relações na mesma velocidade.

Compreendemos melhor os seus registros a partir do momento em que identificamos o seu modo de pensar, caracterizado nos desenhos e anotações, e as motivações principais que o levaram a fazer os estudos que resultaram no conteúdo do Códice. Mas essas ações não estão explícitas e não se tornaram evidentes na exploração investigativa, foram dúvidas surgidas durante essa etapa. Então, talvez essa busca tenha sido mais importante pelas dúvidas que suscitou do que propriamente pelas informações obtidas. Dessa forma, consideramos que o primeiro objetivo perseguido foi alcançado.

A seleção das folhas foi outra etapa que demandou muito trabalho e iniciou pela categorização, já que precisávamos selecionar algumas folhas para analisar, e essa escolha precisava ser justificada. Organizar as folhas do Códice em categorias foi difícil, porque, como já destacamos no texto, elas contêm desenhos e anotações de temas diferentes. Há folhas com 5 (cinco) e até mais assuntos, logo, em que classificação inserir uma folha que versa sobre 5 (cinco) temas? Que categorias criar? Foram dúvidas que tivemos. Desse modo, estabelecemos como categorias os assuntos mais recorrentes nos 10 (dez) volumes e mais assíduo na literatura sobre o Códice Atlântico e sobre Da Vinci.

Estabelecidas as categorias, olhamos com atenção redobrada as 602 (seiscentas e duas) folhas para inseri-las nas classificações, processo que se sucedeu repetidas vezes. A cada instante que manipulávamos as folhas na investigação, mudanças ocorriam na categorização, até que chegamos às sete categorias aludidas anteriormente. Passamos, então, para o estudo específico da categoria geometria, que foi, novamente dividida em temas, e estes em subtemas, já com vistas aos objetos da geometria e da geometria escolar. Mesmo assim, analisar 176 (cento e setenta e seis) folhas do Códice Atlântico talvez fosse tarefa inviável para uma pesquisa doutoral, e, se fosse possível, poderia ficar na superficialidade. Nesse sentido, precisamos estabelecer critérios para, dos 6 (seis) subtemas, selecionar as folhas para averiguação, como o fizemos. Essa eleição resultou em 13 (treze) folhas, cujo exame consideramos não ter sido superficial, pois gerou uma discussão aprofundada, que sucedeu em conhecimentos novos sobre a obra de Leonardo da Vinci. Desse modo, ponderamos que o segundo objetivo perseguido foi alcançado.

O terceiro objetivo proposto foi analisar, verbo que se materializou em um estudo detalhado das folhas e seu conteúdo (em algumas folhas, mais detalhado do que em outras, é verdade). Porém, julgamos que analisamos de fato, pois descrevemos o conteúdo da folha, que tratamos de modo a comunicá-lo com clareza; realizamos marcações nas folhas, reproduzimos alguns desenhos, fizemos outros que poderiam se relacionar aos de Da Vinci e, com isso, trouxemos para fora, para a superfície, uma geometria nova, que tem suas raízes na geometria antiga, mas que, pela criatividade de Da Vinci, foi transformada em uma nova linguagem, em uma linguagem geométrica singular, pois a geometria que está refletida no Códice Atlântico não é a mesma que está nos manuscritos gregos e árabes estudados por Da Vinci, como, por exemplo, *Os elementos* de Euclides e os estudos do físico e matemático persa Alhazem, repetidas vezes citados por ele em suas anotações, contidas no Códice Atlântico.

Essa linguagem geométrica singular é resultado do pensamento baseado em analogias, que Da Vinci desenvolveu ao longo de sua atividade artística/científica. É a objetivação desse modo singular de pensar, por meio do qual ele relacionava diferentes conhecimentos das artes e das ciências, com foco prioritário na sua atividade de pintor, para a qual conseguiu mobilizar tal linguagem e a materializar na expressão quase real e até enigmática de personagens como a Mona Lisa, a Dama com raminho e em cenas narradas e eternizadas em pinturas como *A última ceia*.

A linguagem geométrica singular mencionada está refletida nas folhas do Códice Atlântico, e, em nosso estudo, foi identificada por meio da análise semiótica dos desenhos e anotações que evidenciaram os objetos de alusão dos desenhos de Da Vinci, que fazem parte do campo de referências da geometria, e os associou aos objetos da geometria escolar. Essa relação com a geometria escolar foi feita de forma direta, por meio dos encaminhamentos pedagógicos propostos e materializados nas Unidades Básicas de Problematização, elaboradas no projeto de investigação histórica sugerido.

Além de dar destaque à linguagem geométrica, enfatizamos quais objetos geométricos foram mobilizados por Leonardo da Vinci nos seus estudos experimentais, e como ele os mobilizou para criar suas demonstrações e padrões que estão na fronteira do rigor geométrico e da arte, fruto do seu método que fundiu teoria e prática, ciência e arte, o compreender e o criar, fazendo-o relacionar aos objetos da geometria escolar, realizado quando citamos a geometria dos livros didáticos, documentos oficiais e a que conhecemos mediante nossa experiência docente na Educação Básica; indicamos que objetos geométricos do estudo de Da Vinci são ensinados ou se conectam aos trabalhados na escola, além de mencionar em que nível e ano escolar isso ocorre.

As relações foram tão enfatizadas, que alguns objetos geométricos, mobilizados por Da Vinci, são os mesmos que estão previstos como instrumentos de aprendizagem nos documentos curriculares oficiais da Educação Básica. Como exemplo, podemos citar: as relações entre volume da pirâmide e prisma e entre volume do cilindro e do cone, que Da Vinci movimenta nas transformações volumétrica; o teorema de Pitágoras, mobilizado por ele na quadratura das lúnulas; e a determinação do volume do cubo que são objetos de aprendizagem do currículo do 2º ano do Ensino Médio.

Mas, além de analisar, o objetivo se refere ao enfoque, ou seja, analisar com que enfoque? Com o enfoque da semiótica, segundo Santaella (2012, 2005, 2018), pois há outras abordagens semióticas. Foram os conceitos da semiótica que nos ajudaram a organizar o olhar para ver, compreender e explicar o conteúdo das folhas examinadas. Mas analisamos semioticamente? Sim. Desde a discussão dos conceitos da semiótica, já fizemos uma pré-análise, pois iniciamos as relações com as folhas do Códice Atlântico. Na análise, ressaltamos como as três etapas (significação,

objetivação e interpretação) e cada um de seus conceitos se conectaram ao conteúdo da folha para explicar o seu significado do ponto de vista da semiose.

Por fim, o último objetivo específico se relaciona aos encaminhamentos pedagógicos. Consideramos que este trabalho poderia se encerrar sem os encaminhamentos, o que foi tema de discussão nas bancas de avaliação anteriores à defesa. Porém, como nossa preocupação central é estabelecer relações de forma clara, mantivemos os encaminhamentos com o objetivo maior de nortear a prática pedagógica do professor que ensina matemática (como nós), e, com isso, contribuir com a sua formação.

Mas a análise já contempla o objetivo do trabalho? Sim. Todavia, pensando na prática do professor em sala de aula, há duas etapas importantes: aquilo que chamamos de aula, momento em que o professor expõe o conteúdo, explica, faz relações com outros temas, com os objetos do mundo físico, tira as dúvidas dos estudantes etc. e o momento em que ele propõe as atividades de aprendizagem para os estudantes. Diante desse contexto, ponderamos que as análises que fizemos na Parte II do trabalho seria como a aula do professor, e os encaminhamentos pedagógicos, da Parte III, seriam as atividades de aprendizagem propostas após a aula, ou seja, os encaminhamentos pedagógicos complementam a análise. Portanto, consideramos ter atingido o último objetivo específico perseguido.

Nosso entendimento é que os objetivos específicos são etapas necessárias para o atendimento do objetivo geral e, como fizemos argumentação que prova o atendimento de todos os objetivos específicos, julgamos que atingimos, também, o objetivo geral, que foi “Estabelecer relações entre os objetos da geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e os objetos da geometria escolar, relações amplamente instituídas na Parte II e Parte III, já discutidas”.

Mas que tipo de relações foram estabelecidas? Acreditamos ter definido três tipos de relações: *de igualdade ou equivalência*, *de semelhança* e *de complementaridade*. Para falar da *igualdade ou equivalência*, conceituemos as expressões $5 = 5$, $A = A$, $3x - 6 = x - 2$ e $x^2 - 2x = 0$. Pode-se dizer que temos uma igualdade em todas as expressões? Considere, agora, um triângulo, cuja área mede $2m^2$, e um retângulo, que tem $2m^2$ de área. Esses polígonos são iguais? Nessas situações matemáticas, a igualdade pode ser estabelecida no sentido de termos coisas iguais, com mesmo valor, como $5 = 5$, ou que “não são iguais”, mas têm o mesmo valor em quantidade, ou seja, que são equivalentes, como, por exemplo, a

expressão $3x - 6 = x - 2$, na qual $x = 2$ fará com que os dois membros sejam iguais a 0 (zero) o que torna as expressões $3x - 6$ e $x - 2$ equivalentes.

Analogamente, em nosso estudo, julgamos ter estabelecido relações de igualdade ou equivalência, ao relacionar os objetos da geometria refletida no Códice Atlântico aos objetos da geometria escolar, por conceituarmos serem os primeiros objetos iguais ou equivalentes aos últimos. Como exemplo, citamos a semelhança de triângulos que Da Vinci mobilizou em seus estudos sobre perspectiva, por ser uma das bases geométricas da perspectiva aplicada à arte. Esse objeto *semelhança de triângulos* é um dos instrumentos de aprendizagem em geometria escolar. As razões e proporções obtidas ao relacionar os lados dos triângulos semelhantes são as mesmas estudadas na Educação Básica, bem como a relação de ampliação e redução, a homotetia, da Educação Básica, que nos estudos de Da Vinci se associa ao tamanho do objeto a ser desenhado. Portanto, os usos são distintos mas o objeto usado é o mesmo, seja por igualdade ou equivalência.

As relações de *semelhança*, como acabamos de comentar, ocorrem, por exemplo, entre triângulos que têm os ângulos internos congruentes e lados proporcionais, geralmente são obtidos por uma transformação de ampliação ou redução, que chamamos de homotetia. Em semelhança, os triângulos não são iguais e nem equivalentes, são proporcionais. O problema da quadratura do retângulo não é objeto de aprendizagem da Educação Básica, porém quando a discutimos e a relacionamos à transformação de um triângulo isósceles em um retângulo, e este em quadrado, instituímos um vínculo de semelhança entre os estudos de Da Vinci, o estudo desses polígonos e a medição de áreas, que são objetos da geometria escolar. Em outras palavras, queremos dizer que o objeto mobilizado por Da Vinci não é o mesmo, mas é semelhante ao objeto da geometria escolar, por medir áreas e relacionar polígonos distintos que têm mesma área.

Por fim, a *complementaridade* ocorre na matemática, por exemplo, quando se toma a medida de dois ângulos e a soma dessas medidas é 90° , ou seja, o complemento de um ângulo pode ser entendido como *a medida em graus que falta para que ele seja um ângulo de 90°* . Então, a relação de complementaridade foi estabelecida quando fizemos alguma proposição que não está diretamente refletida no trabalho de Da Vinci, mas se relaciona com ele, para complementar a argumentação feita em determinada folha, para inserir informações que faltam, ou melhor, que estão implícitas na discussão do tema da folha. Isso ocorreu, por exemplo,

na análise da folha 100r, na qual um dos desenhos de Da Vinci é um retângulo subdividido em quadrados menores.

Na folha, não é explícita a relação desse desenho com a medição de áreas, mas ela está subtendida no desenho e no texto de Da Vinci. Então, o que fizemos? Discutimos o desenho de Da Vinci, relacionando-o à medição de área e ao fato de que um quadrado (ou retângulo) pode ser dividido em dois triângulos retângulos. Mostramos que essa relação justifica a fórmula para medição da área de um triângulo, que é *a metade do produto da medida da sua base pela altura*, uma vez que a área de um quadrado, ou retângulo, é *produto da medida da sua base pela altura*, ou seja, a área do triângulo é a metade da área do retângulo, desde que esse triângulo seja obtido pela divisão de um retângulo em dois triângulos equivalentes. Dessa forma, entendemos que complementamos a discussão de Da Vinci, e, por essa complementação, relacionamos os desenhos dele à medição de áreas de polígonos, que é objeto de aprendizagem da geometria escolar.

Assim, consideramos que atingimos o nosso objetivo geral, proposto no início do trabalho. Mas qual a relação entre a argumentação feita para justificar o atendimento ao objetivo geral e uma resposta possível à questão central? São as relações que estabelecemos. Então, a questão **que tipos de relações podem ser estabelecidas entre a geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci e os objetos da geometria escolar?** pode ter como resposta: **a geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci pode se relacionar por igualdade ou equivalência, por semelhança ou por complementaridade aos objetos da geometria escolar.**

Portanto, por meio da pesquisa que fizemos, consideramos que atingimos os quatro objetivos específicos, o objetivo geral e obtivemos uma resposta para a questão central, ou seja, provamos nossa hipótese, transformando nosso trabalho em tese. Assim, podemos afirmar que **A geometria refletida no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci contém objetos de geometria que se relacionam aos objetos da geometria escolar, e que podem ser explorados pelo professor por meio da problematização dos desenhos e anotações contidos nos 10 (dez) volumes referentes à publicação investigada, tanto para a elaboração de encaminhamentos pedagógicos para a Educação Básica quanto para a formação de professores que ensinam matemática.**

Mas que contribuições essa tese, e a pesquisa que a originou, trouxe para a formação dos seus autores⁴¹? Consideramos que as contribuições foram pessoais e profissionais. Porque, respectivamente, se referem a aprendizagens para a vida e para o exercício da docência na Educação Básica (onde já atuo) e na Educação Superior (onde ainda pretendo atuar), em que este trabalho possibilitou conhecimentos relacionados a essa atividade.

Os aportes para a vida pessoal estão em uma mudança de visão ou em uma nova filosofia de vida. Trata-se, então, de uma transformação estrutural que implicou o aperfeiçoamento de todas as atividades por mim potencializadas no que chamamos de vida, de existência. Considero que vejo, analiso e tomo decisões de forma mais coerente e rápida do que o fazia. Isso foi um ganho muito importante proporcionado por esta pesquisa. É difícil materializar esse aprendizado no texto escrito, mas a forma como visualizo as situações antecipa possíveis problemas ou me ajuda a lidar melhor com eles, na tentativa de resolvê-los de forma que causem menores danos, já que fazem parte da vivência do ser humano. Essa capacidade de lidar com obstáculos e situações que a vida nos apresenta foi aprimorada com o desenvolvimento deste estudo.

Quanto à formação profissional, os estudos que fiz durante a pesquisa me possibilitaram ser um professor melhor na Educação Básica, cheguei até a ser questionado, por um aluno do 3º ano do Ensino Médio, sobre a minha área de atuação, porque eu não era professor de História, mas passei a estabelecer correlações entre os temas das aulas e o contexto histórico (dentre outros). Esse estranhamento do estudante ocorreu por serem as aulas de matemática, geralmente, muito restritas ao contexto matemático, com poucas correlações com outros contextos, inclusive as minhas aulas, antes dos aprendizados deste trabalho. Então, a partir desta pesquisa, comecei a ministrar aulas mais completas, estabelecendo as relações mencionadas, tornando o meu trabalho docente mais interessante.

Quanto à formação para uma possível docência no Nível Superior, pondero dois aspectos: a formação para o ensino e para a pesquisa. O primeiro, julgo que aprendi com a pesquisa em si e com a formação doutoral em sua totalidade. Destaco

⁴¹ O plural é por entender que a pesquisa foi feita em parceria, e este texto é produto das discussões entre um estudante de doutorado (eu) e o seu orientador (Prof. Iran Abreu Mendes). Porém, quando relato as contribuições para a formação pessoal, me refiro a mim, por entender que se trata de algo particular.

os estágios de docência que fiz e a convivência com meu orientador e com os professores que tive, principalmente o professor Carlos Aldemir Farias. Com eles aprendi a planejar, ensinar e avaliar uma aula ou disciplina ministrada, além do que, adquiri habilidade para produzir resultados em uma disciplina, aprimorando-os para uma possível publicação em parceria com os estudantes e demais envolvidos. Este último ponto já tangencia a atividade de pesquisa, que é uma das atribuições de um professor do Ensino Superior.

Fazer estudos, orientar pesquisas (artigo, TCC e monografia), escrever trabalhos, publicar (em revistas e eventos), avaliar em bancas (de graduação, de especialização e até de mestrado), classificar para revista (Qualis-CAPES), organizar ou participar de eventos, como ouvinte ou como palestrante; fazer tudo isso ao mesmo tempo e lidar com os prazos, são algumas das atribuições de um docente do Ensino Superior, principalmente de quem trabalha na Graduação e Pós-graduação. Todas essas atividades eu experimentei, como estudante de doutorado é claro, pois não quero ser pretencioso e fazer parecer que aprendi tudo com a pesquisa doutoral e que já sou um exímio pesquisador. Não. Conheço alguns pesquisadores, (pessoalmente ou por seu currículo lattes que aprendi a visitar para me espelhar e saber qual o meu lugar) e os respeito. Sei que ainda tenho muito a aprender e um longo caminho a percorrer, mas o que quero dizer é que a pesquisa doutoral, no sentido amplo, me possibilitou ter contato com essas práticas. Desse modo, acredito ter aprendido um pouco sobre o trabalho de um professor do Nível Superior.

Ainda nesse contexto, pontuo os aprendizados com a elaboração deste texto, pois comunicar o resultado de uma investigação se faz para o outro, para o leitor, que é quem você quer alcançar. Porém, não só para ele, uma vez que o trabalho de feitura de uma obra atinge, igualmente, quem o realiza, modifica-o e torna-o melhor, do ponto de vista do aprendiz. Escrever um texto não é tarefa simples, exige concentração, dedicação e muita energia para conseguir transmitir o que se pretende. No meu entendimento, relatar os resultados é mais complexo do que a própria investigação. Por isso, a escrita deste trabalho exigiu bastante de minha cognição e do meu orientador, fazendo-me pensar, refletir, avançar e, muitas vezes, recuar, duvidar, mas também afirmar. Isso é o aprender, e, assim, eu aprendi com o trabalho que fiz.

Mas, esta pesquisa, mais especificamente este texto, poderá trazer subsídios para o ensino de matemática, de forma especial, o de geometria, pois, como já discutimos, estabelecemos relações entre a geometria refletida no Códice Atlântico e

a geometria escolar. Diante dessa constatação, o que pretendemos como contribuições para o ensino é que essas relações possam chegar às salas de aula, de forma direta, por sua utilização pelo professor da Educação Básica, como atividade de ensino, ou indireta, por levar esse profissional a refletir a respeito de sua atividade docente, ou por conceber um formador de professores de matemática que pensam em como melhor ensinar na Educação Básica.

Creemos, precipuamente, que as cooperações para o ensino estão postas de forma mais clara, na análise e nos encaminhamentos didáticos, pois um exame pormenorizado tem como principal resultado a possibilidade de o professor que ensina matemática elaborar ou ministrar suas aulas mediante o estudo de folhas do Códice Atlântico, investigando e tratando as informações das folhas e apresentando o seu conteúdo aos estudantes de maneira similar ao que fizemos. As atividades, por sua vez, propiciam que o docente complemente a exposição do conteúdo e, para além disso, proporcionam que os alunos se movimentem em torno do que precisam conhecer.

É possível que a metodologia subjacente aos encaminhamentos pedagógicos auxilie de forma mais significativa que estes em si, uma vez que ela, pautada na investigação e problematização, pode provocar uma mudança de postura do professor em relação ao ensino. O contato com as atividades no formato de UBP e o projeto de investigação histórica propicia ao professor optar por esse método para planejar e executar a sua ação docente.

Então, as atividades que formulamos, as orientações que disponibilizamos para sua execução, as diretrizes para a realização do trabalho com UBP, sem dúvida são contribuições possíveis e importantes para o fazer docente, contudo a possibilidade de esse professor ter uma outra filosofia de trabalho, pautada na problematização e na sua consequência, e a investigação, se apresenta tão importante quanto ou até uma contribuição mais relevante, mais significativa para o ensino de matemática e de geometria na Educação Básica.

A possibilidade de aplicação das atividades de problematização e do projeto de investigação, sua reformulação ou a probabilidade de mudança no modo de ensino têm implicações diretas na aprendizagem. Um professor que decidir ensinar por meio de problematizações e investigações fará com que seus alunos se movimentem, participem, pesquisem, questionem e elaborem conjecturas. Esse movimento que uma atividade de problematização e investigação provoca é o que vai conduzir os

estudantes ao aprendizado, estabelecendo relações entre o contexto escolar e outras conjunturas, podendo capacitá-los melhor para o enfrentamento de situações que possam vir a vivenciar.

A mudança de postura do professor da Educação Básica ou do formador desses profissionais ou a provocação de reflexões nesses docentes, que poderão ocorrer em decorrência deste trabalho, bem como a nossa inquietação em fornecer uma análise e encaminhamentos pedagógicos que conectem as geometrias já mencionadas e, ainda, a nossa preocupação em orientar o professor que decidir pelos encaminhamentos pedagógicos apresentados, são o que consideramos contribuições para a formação do educador que ensina matemática. Mesmo não tendo como foco discutir a formação de professores, nossos aportes transversalizam essas instruções.

Os subsídios para a formação do professor, para o ensino e para a aprendizagem são, também, auxílios para o campo da Educação Matemática, que tem a formação de professores, o ensino e a pesquisa (que reflete nos dois primeiros) como três estacas importantes. Como já falamos das duas primeiras, ocupar-nos-emos às contribuições deste trabalho para a Educação Matemática, como um campo de pesquisas cuja produção tem volume considerável.

Como especificamos na parte I deste texto, fizemos um levantamento em portais que hospedam teses e dissertações brasileiras, e encontramos um único trabalho sobre o Códice Atlântico, com foco diverso do nosso estudo. Esse resultado é similar se levarmos em consideração os livros sobre o tema, publicados no Brasil, aos quais tivemos acesso em nosso levantamento bibliográfico. Essa repercussão nos leva a ponderar que o nosso estudo traz uma contribuição inédita para o campo de pesquisas em Educação Matemática, por ser um dos únicos (ou o único) que faz uma análise do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci, e, a partir dos resultados dessa investigação, elabora encaminhamentos pedagógicos para o ensino de geometria na Educação Básica e para a formação de professores que ensinam matemática.

Conceituamos que esse ineditismo se confirma, também, pela identificação da linguagem geométrica singular, refletida nas folhas de desenhos e anotações de Da Vinci, as quais já discutimos neste texto, uma vez que não temos conhecimento da existência de outro trabalho que constatou e destacou tal linguagem como elemento a ser relacionado e mobilizado para o ensino de geometria na Educação Básica. Essa verificação e relação propostas podem subsidiar o campo de pesquisas em Educação

Matemática, por trazer um conhecimento novo, produzido com foco em dois pilares dessa disciplina: o ensino de matemática e a formação de professores que ensinam matemática. Não se trata de contribuímos em grandes proporções, mas de desejarmos que este estudo provoque reflexões e abra caminhos para novas pesquisas sobre o Códice Atlântico dentro do referido campo.

Nesse sentido registramos neste texto que este trabalho desdobrará em outras ações como o projeto em elaboração nomeado *Leonardo vai à escola* que pretendemos concluir e efetivar logo que se feche o ciclo de formação doutoral e se inicie o novo ciclo de trabalho no Campo da Educação Matemática. O projeto visa levar as relações aqui estabelecidas entre a geometria refletida no Códice Atlântico e a geometria escolar até as salas de aula de escolas da Educação Básica Brasileira.

Para reafirmar as contribuições deste trabalho para o campo de pesquisas em Educação Matemática, elaboramos um modelo que orientou nossa investigação, descrito na Parte I deste texto. Como já mencionamos, nosso intuito é que esse modelo possa servir de orientação metodológica para outros estudos similares ao nosso, que tomem como fonte de informações manuscritos, livros e outros registros de uma produção de conhecimento do campo das artes, arquitetura, engenharia, navegações, física, matemática, dentre outros, cujo conteúdo mobilizou conhecimento matemático.

Levando em consideração que analisamos 13 (treze) folhas sobre geometria e que o Códice Atlântico contém 1.119 (mil, cento e dezenove) folhas, o modelo aludido pode ser tomado para pesquisas sobre qualquer grupo de folhas do referido Códice e, igualmente, sobre outras coleções de folhas com estudos de Da Vinci como: Códice Arundel, Códice Windsor, Códice Trivulziano, Códice Ashburnham, Códices de Madri (2 Códices, A e B), Códices do Instituto de França (12 Códices, de A a M), Códices Forster (3 Códices, I, II e III), Códice Leicester, Códice sobre o voo dos pássaros, além de publicações com alguma produção de Da Vinci, como o *De Divina Proportione* (de Luca Pacioli), e publicações de outras áreas de conhecimento, já referenciadas anteriormente.

Nesse sentido, esperamos colaborar com a formação de todos aqueles que lerem este texto, se não pela utilização imediata da proposta e de seus resultados, mas pelo fato de, a partir dessa leitura, pensarem e repensarem sua prática docente, objetivando sua inovação, complementação e/ou ressignificação. De forma especial, esperamos atender às expectativas dos professores de matemática da Educação

Básica, por uma metodologia que promova o aprendizado que desejam para seus alunos, com nossos encaminhamentos pedagógicos para o ensino de geometria, contando com a adequação das atividades propostas para outros conteúdos matemáticos, outros níveis de ensino e, por que não, para outras disciplinas do currículo escolar.

De outra maneira, mas que não exclui a anterior, pretendemos que este trabalho possa auxiliar no âmbito de estudos e pesquisas em Educação Matemática, no que tange a uma abordagem inovadora dos estudos de Da Vinci, conectando-os à geometria e mostrando as interseções deste campo de estudos da matemática com a arte de Leonardo da Vinci, uma vez que constatamos durante a pesquisa que existe uma lacuna de estudos que tratem dos desenhos do Códice Atlântico no Brasil. Tal lacuna nos levou a formalizar o modelo de pesquisa aqui apresentado.

Por fim, por ora, encerramos este texto com o sentimento de ter realizado um trabalho, cujos esforços exigiram um gasto de energia e cognição que, conforme nossa avaliação pessoal, concentrou-se em um importante material que pode ser lido e interpretado pelos professores que ensinam matemática na Educação Básica. Esperamos, ainda, que seus efeitos sejam emocionais, energéticos e, principalmente, lógicos, pois este último significaria que nosso estudo é capaz de fazer com que os leitores aprendam um pouco mais sobre os temas aqui tratados. Portanto, que este instrumento possa atualizar sua crítica nas mentes interpretadoras de professores de matemática, pesquisadores, estudantes e demais leitores interessados.



REFERÊNCIAS

Bibliografia

ALBERTI, L. B. **Da Arquitetura**. Tradução e organização Sérgio Romanelli. São Paulo: Hedra, 2012.

ARANHA, M. L. A. **História da educação**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 1996.

BAGNI, G. T.; D'AMORE, B. **Leonardo e a matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

BARROS, J. A. (2004). **O campo da história: especialidades e abordagens**. Petrópolis: Vozes.

BARROS, J. D. **Os conceitos: Seus usos nas ciências humanas**. Petrópolis: Vozes, 2016.

BICUDO, I. Prefácio. In: Euclides. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. p. 11-94.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). 2017.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+): Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. 2007.

CAJORI, F. **Uma história da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CAPRA, F. **A alma de Leonardo da Vinci: um gênio em busca do segredo da vida**. Tradução Gilson César Cardoso de Sousa. São Paulo: Cultrix, 2012.

CAPRA, F. **A ciência de Leonardo da Vinci: um mergulho profundo na mente do grande gênio da Renascença.** Tradução Bruno Costa. São Paulo: Cultrix, 2008.

CARMO, H.; FERREIRA, M. M. **Metodologia da investigação: guia para auto-aprendizagem.** 2. ed. Lisboa – Portugal: Universidade aberta, 1998.

COLLETE, J. **História de las matemáticas.** I. Madrid: Siglo XXI de Espana Editores, S. A., 1985.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: Da teoria à pratica.** 8 ed. Campinas: Papirus, 2001.

D'AMBROSIO, U. **Educação para uma sociedade em transição.** 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016 (Coleção contextos da ciência).

DANTE, L. R. **Matemática, volume único.** São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris, Matemática 6º ano.** 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris, Matemática 7º ano.** 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris, Matemática 8º ano.** 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris, Matemática 9º ano.** 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução João Ângelo Brunelli. Do original em Latim de Frederico Commandino. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FARIAS C. A.; MENDES, I. A. As culturas são as marcas das sociedades humanas. In: MENDES, I. A.; FARIAS C. A. (org.). **Práticas socioculturais e educação matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2014 (Coleção contextos da ciência). p. 15 – 48.

FAZIO, M.; MOFFETT, M.; WODEHOUSE, L. **A história da arquitetura mundial.** Tradução técnica Aezandre Salvaterra. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

FLORES, C. R. Pesquisa com imagem na história da matemática: alguns apontamentos. In: MENDES, I. A.; MOREY, B. **Debates Temáticos sobre Pesquisa em História da Matemática e da Educação Matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2018.

GONÇALVES-MAIA, R. **Ciência, pós-ciência, metaciência.** Tradição, inovação e renovação. São Paulo: Livraria da Física, 2011 (Coleção contextos da ciência).

HEMENWAY, P. **O código secreto, a fórmula misteriosa que governa a arte, a natureza e a ciência.** Tradução Maria do Rosário Quintela. Köln, Alemanha: EVERGREEN GmbH, 2010.

HEYDENREICH, L. H. **Arquitetura na Itália 1400 - 1500**. Tradução Maria Thereza Rezende. São Paulo: Cosac & Naify Edições, 1998.

ISAACSON, W. **Leonardo da Vinci**. Tradução de André Czarnobai. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2017.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Tradução de Ana Sampaio e Filipe Duarte. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: Uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. Tradução Rosana G. S. Miskulin; Cármen Lúcia B. Passos; Regina C. Grando e Elisabeth A Araújo.

ZETETIKÉ/UNICAMP, Faculdade de Educação, Revista do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. v.4, n.5, jan./jun. 1996, p. 99-120.

KING, R. **O domo de Brunelleschi, Como um gênio da renascença reinventou a arquitetura**. Tradução de S. Duarte. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2013.

KLING, M. **El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días**, I. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

MARTINS, J. P. Duplicación del cuadrado y el volumen de sólidos en el Códice Atlántico de Leonardo da Vinci: un estudio de la hoja 100r. In: **Revista Paradigma**, Vol. XLI, Nº Extra 1, p. 285 – 316, 2020. Disponível em:

<http://revistas.upel.digital/index.php/paradigma/article/view/8574> Acesso em: 14/11/2020.

MARTINS, J. P. **Ensino de simetria por meio de problematização sociocultural**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

MARTINS, J. P. MENDES, I A. Informações históricas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci mobilizadas para o ensino de geometria na Educação Básica. In: **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCHEM)** - Volume 07, Número 20, p. 392 – 405, 2020. Disponível em:

<https://revistas.uece.br/index.php/BOCHEM/article/view/3458> . Acesso em: 28/10/2020.

MENDES, I, A.; MIGUEL, A.; BRITO, A J.; CARVALHO, D. L. **História da matemática em atividades didáticas**. São Paulo/Natal: Livraria da Física/Editora da UFRN, 2009 (Coleção Contextos da Ciências).

MENDES, I. A. **História da matemática no ensino**: entre trajetórias profissionais epistemologias e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MENDES, I. A. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009a.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009b. (Coleção contextos da ciência).

MENDES, I. A.; FARIAS C. A. (org.). **Práticas socioculturais e educação matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2014. (Coleção contextos da ciência).

MIGUEL, A.; MENDES, I. A. Mobilizando histórias na formação inicial de educadores matemáticos: memórias, práticas sociais e jogos discursivos. In: **REMATEC**. v. 16. p. 120-140. 2021. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/324/271>. Acesso em 24/02/2021.

MIGUEL, A.; MENDES, I. A. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. In: **ZDM Mathematics Education**. v. 42. p. 381 – 392, 2010.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

NAVONI, M. **Leonardo da Vinci y los secretos del Códice Atlântico**. Tradução Eva María Cantenys Félez e Antonio Díaz Pérez. Barcelona: Art Blume, S. L., 2012.

OZANAM, J. **Recreations in mathematics and natural philosophy**. recomposed by m. Montucla and tr. by C. Hutton. Publishers: Jean Étienne Montucla, Edward Riddle. 1814 (Do original da Oxford University, digitalizado em 2006). Disponível em: https://books.google.com.br/books/about/Recreations_in_mathematics_and_natural_p.html?id=BPIDAAAQAAJ&redir_esc=y. Acesso em: 14/06/2020.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2015.

RACIONERO, L. **Leonardo da Vinci**. Tradução Carlos Nougué. Barcelona: Folio, 2008.

SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 1) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008a.

SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 2) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008b.

SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 3) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008c.

SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 4) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008d.

SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 5) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008e.

SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 6) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008f.

SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 7) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008g.

SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 8) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008h.

- SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 9) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008i.
- SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. **O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci** (vol. 10) (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci). Barcelona: Fólio, 2008j.
- SANTAELLA, L. **Leitura de Imagens**. São Paulo: Editora Melhoramentos, 2012.
- SANTAELLA, L. **Matrizes da linguagem e pensamento: sonora visual verbal aplicações na hipermídia**. 3. ed. São Paulo: FAPESP, 2005 - 5. Reimpressão, 2019 – Iluminuras.
- SANTAELLA, L. NOTH, W. **Imagem: cognição, semiótica, mídia**. São Paulo: Iluminuras, 1997 – 9. Reimpressão, 2015.
- SANTAELLA, L. **O que é semiótica?** 14. ed. São Paulo: Brasiliense, 1983.
- SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.
- SOUSA, J. M. R. de, **Trissecção do ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia**. Tese (Mestrado) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, 2001.
- TATON, R. **História geral das Ciências: a ciência antiga e medieval** (vol. 3: A Idade Média). Tradução Ruy Fausto e Gita k. Ghinzberg. São Paulo: Difusão europeia do livro, 1959.
- TORNAGHI, P. **Leonardo astrólogo: jogo de símbolos na Santa Ceia** 1. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2014.
- VALÉRY, P. **Introdução ao método de Leonardo da Vinci**. Tradução de Geraldo Gérson de Souza. - Ed. bilíngue - São Paulo: Editora 34, 1998. (Coleção Teoria).
- VALLA, G. **De expetendis et fugiendis rebus opus**. Veneza. Editora Manutius, 1501 (Do original da Biblioteca nacional de Baviera, digitalizado em 2011). Disponível em:
http://books.google.com/books/about/de_expetendis_et_figiendis_rebus_opus.html?hl=pt-BR&id=XixLAAAACAAj Acesso em 25/07/2020.
- WHITE, M. **Leonardo o primeiro cientista**. 4 ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.
- ZUCOLOTTO L. **Máquinas de voo de Leonardo da Vinci: analogias biônicas e suas potencialidades no processo criativo**. Dissertação (Mestrado) - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Belo Horizonte: 2015.

Videografia

- A VIDA** de Leonardo da Vinci. Direção e produção de Renato Castellani. Itália: RAI CBS, 1971. 2 DVD's (270 min).
- CONSTRUINDO** um império: O Mundo de Da Vinci. Documentário do The History Channel. Produção Peter Weller. Coprodução: The History Channel. Título original:

Engineering an empire: Da Vinci's world. 2006. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=w46wGLzIF9w>. Acesso em 03/03/2020.

LEONARDO da Vinci: Il Codice Atlantico alla Biblioteca Ambrosiana. Direção: Olga Martini. Produção: N.G. Produzioni Televisive. Prodotto da Fondazione Cardinale Federico Borromeo, presso La Biblioteca Ambrosiana. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Z5E6dmwBQts> Acesso em 03/05/2020.

LUCIA Santaella - Signos e categorias. Pós-graduação Comunicação em Semiótica. PUC - SP, 2011. Vídeo com 07min. e 19 seg. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=lomcJvKGY10>. Acesso em 20/07/2020

LUCIA Santaella ministra Aula Magna: A pesquisa como forma de vida. PUC-SP. Pró-Reitoria de Pós-Graduação. Realização TV PUC, 2018. Vídeo com 40 min. e 19 seg. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=j608M-UQt6l>. Acesso em 05/11/2020

TÓPICOS de história da matemática: A matemática grega I. Documentário da rede BBC. Programa de pesquisa: Gale Jagger. Produção Andrew Barker. Coprodução: BBC NEWS. Título original: Topics in the history of mathematics. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=AQPwFaw8Y5o>. Acesso em 02/03/2020.

Netnografia

BIBLIOTECA Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). <https://bdtd.ibict.br/vufind/> Último acesso em 27/11/2020.

CATÁLOGO de Teses e Dissertações da CAPES. <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/> Último acesso em 15/12/2020.

CENTRO Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat). <http://www.crephimat.com/>. Último acesso em 01/12/2020.

CÓDICE Atlântico digital. <https://www.iberlibro.com/CODICE-ATLANTICO-Biblioteca-Ambrosiana-Milan-vols/30164629059/bd#&gid=1&pid=1> Último acesso em 10/12/2020.

GIUNTI Editore de Florença: <https://www.giunti.it/> Último acesso em 12/09/2020.

GOOGLE Acadêmico. <https://scholar.google.com.br/?hl=pt>. Último acesso em 10/12/2020.

INFORME da arte. <http://informedaarte.com.br/> Último acesso em 16/10/2020.

PORTAL de teses USP. https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/16/16131/tde-13102005-115856/publico/02_cap1.pdf Último acesso em 11/11/2020.